2015

Edisi Buku Siswa

Langkah Emas Menuju Sukses OSN Matematika

BIDANG ALJABAR & TEORI BILANGAN

Didik Sadianto, M. Pd.

Buku-OSN-Didik Sadianto

SMA Darul Ulum 2 Jombang,
Jawa Timur

LANGKAH EMAS MENUJU SUKSES OSN MATEMATIKA

BIDANG ALJABAR & TEORI BILANGAN (Edisi Buku Siswa)

PEMBINAAN KHUSUS OLIMPIADE SAINS NASIONAL MATEMATIKA

(CALON PESERTA SELEKSI OSN 2016)

DISUSUN OLEH

DIDIK SADIANTO, M.Pd.

SMA DARUL ULUM 2 UNGGULAN BPPT CIS ID 113 JOMBANG

PONDOK PESANTREN DARUL ULUM, PETERONGAN, JOMBANG, JAWA TIMUR

Telp. 0321-865265, Website:http://www.smulandu2-jbg.sch.id

Tahun 2015

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah Penulis ucapkan kepada Allah, SWT karena dengan karunia-Nya Penulis dapat menyelesaikan penulisan buku ini. Buku ini Penulis tulis dalam rangka mempermudah tugas dalam mempersiapkan siswa-siswa SMA Darul Ulum 2 Unggulan BPPT CIS ID 113 Jombang menghadapi olimpiade matematika pada tahap-tahap awal, yakni OSK dan OSP 2016. Buku ini merupakan hasil revisi 03 dari buku edisi 2012 (**merupakan edisi buku pegangan siswa**).

Penulis menyarankan sebagai bahan penunjang untuk materi dalam buku ini, Pembina Olimpiade di sekolah dapat menyampaikan materi tentang pembuktian langsung maupun tidak langsung serta Strategi Penyelesaian Masalah (Problem Solving Strategies) yang dapat dipelajari dari beberapa buku yang ada seperti Langkah Awal Menuju ke Olimpiade Matematika karya Wono Setya Budhi, Problem-Solving Strategies karya Arthur Engel maupun Problem-Solving Through Problems karya Loren C. Larson dan mengujungi blog Pak Eddy Hermanto yang berisi Soal & Solusi OSN Matematika Mulai Tahun 2002 (www.baktiolimpiade.wordpress.com).

Ucapan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dalam penyelesaian buku ini, khususnya kepada isteri tercinta Penulis, Rahayu Lestari, S.Pd., yang telah memberi dukungan yang besar kepada Penulis serta juga telah melahirkan puteri pertama kami, Qonitah Ayu Nabilah Nuruljannah pada 23 Nopember 2010.

Penulis juga berharap semoga, buku ini dapat menjadi salah satu panduan belajar TIM OSN 2016 SMA Darul Ulum 2 Unggulan BPPT CIS ID 113 Jombang dan juga memberi manfaat kepada semua TIM Pembinaan Matematika. Pada akhirnya bisa mewakili Sekolah, Pondok Pesantren Darul Ulum, Kab. Jombang, Propinsi JATIM di level OSN Matematika Tahun 2016. Amin…Amin.

Penulis merasa bahwa buku ini masih jauh dari sempurna. Untuk itu Penulis mengharapkan saran dan kritik dari Pembaca yang budiman sebagai bahan perbaikan buku ini.

Akhir kata semoga buku ini dapat bermanfaat yang sebesar-besarnya bagi Pembaca sekalian.

Jombang, 28 Oktober 2015

DIDIK SADIANTO, M.Pd.
(didiksadianto.UTS2MAT@gmail.com)
(**http://www.osn-matematika.blogspot.com**)

DAFTAR ISI

BAB I
ALJABAR

1. Identitas Aljabar

a. Identitas yang melibatkan bentuk kuadrat.

Ingat kembali konsep dasar pada waktu SMP:

- $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + b^2 + 2xy$
- $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$
- $(a+b+c+d+e)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + 2ab + 2bc + 2cd + 2de + 2ea$
- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Contoh 1:

Jumlah dua bilangan adalah 21 dan hasil kalinya adalah -7.

Tentukan:

i. jumlah kuadrat dari dua bilangan tersebut
ii. jumlah kebalikan dari dua bilangan tersebut
iii. jumlah pangkat empat dari dua bilangan tersebut

Pembahasan:

Misalkan dua bilangan tersebut a dan b, maka kita mempunyai

$$a + b = 21 \;\&\; ab = -7$$

Sehingga:

1. $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 21^2 - 2(-7) = 455$
2. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = \frac{21}{-7} = -3$
3. $a^4 + b^4 = (a^2)^2 + (b^2)^2 = (a^2+b^2)^2 - 2a^2b^2 = 455^2 - 2(-7)^2 = 357$

Contoh 2:

Tentukan bilangan bulat positif a dan b sehingga $\sqrt{5+\sqrt{24}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ dengan $a > b$

Pembahasan:

Perhatikan bahwa

$$5 + \sqrt{24} = 3 + 2\sqrt{2.3} + 2 = \left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^2$$

Sehingga

$$\sqrt{5+\sqrt{24}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

Jadi, $a = 3 \;\&\; b = 2$

Contoh 3:

Hitunglah

$$\sqrt{(1\,000\,000)\,(1\,000\,001)\,(1\,000\,002)(1\,000\,003)+1}$$

tanpa menggunakan kalkulator.

Pembahasan:

Misalkan $n = 1\,000\,000 = 10^6$ Maka

$n(n+1)(n+2)(n+3) = n(n+3)(n+1)(n+2) = (n^2+3n)(n^2+3n+2)$

Misalkan $y = n^2 + 3n$ Maka

$n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = (n^2+3n)(n^2+3n+2)+1 = y(y+2)+1 = (y+1)^2$

Jadi,

$$\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)+1} = y+1 = n^2+3n+1 = 10^{12}+3\,.\,10^6+1$$
$$= 1\,000\,003\,000\,001$$

Contoh 4:

Tentukan nilai dari $123456789^2 - 123456790\,.\,123456788$

Pembahasan:

Misalkan $x = 123456789$ Maka

$$123456789^2 - 123456790\,.\,123456788 = x^2 - (x+1)(x-1) = 1$$

Contoh 5:

(AIME, 1989) Hitunglah nilai dari $\sqrt{(31)(30)(29)(28)+1}$

Pembahasan:

Misalkan 4 bilangan bulat berurutan: $(n-1), n, (n+1), (n+2)$

Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}(n-1)(n)(n+1)(n+2)+1 &= (n^2-1)(n^2+2n)+1\\ &= n^4+2n^3-n^2-2n+1\\ &= (n^2+n)^2-2(n^2+n)+1\\ &= (n^2+n-1)^2\end{aligned}$$

Sehingga:

$$\sqrt{(31)(30)(29)(28)+1} = (29^2+29-1) = 869$$

Selanjutnya, kita bahas tentang identitas aljabar yang belum kalian pelajari pada waktu SMP. Tetapi identitas ini sangat bermanfaat untuk penyelesaian soal-soal olimpiade. Identitas ini lebih di kenal dengan sebutan **Sophie Germain's Identity**

$$a^4 + 4b^4 = (a^2 - 2ab + 2b^2)(a^2 + 2ab + 2b^2)$$

Bukti identitas:

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} a^4 + 4b^4 &= a^4 + 4a^2b^2 + 4b^2 - 4a^2b^2 \\ &= (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2 \\ &= (a^2 - 2ab + 2b^2)(a^2 + 2ab + 2b^2) \end{aligned}$$

Contoh 6:

Buktikan hanya n = 1, $n \in \mathbb{N}$, yang menyebabkan bahwa $n^4 + 4$ merupakan bilangan prima

Pembahasan:

Dengan menggunakan Sophie Germain's trik,

$$\begin{aligned} n^4 + 4 &= n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 \\ &= (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 \\ &= (n^2 + 2 - 2n)(n^2 + 2 + 2n) \\ &= ((n-1)^2 + 1)\,((n+1)^2 + 1) \end{aligned}$$

Masing-masing faktor di atas, untuk $n > 1$ maka $((n-1)^2 + 1) > 1$ & $((n+1)^2 + 1) > 1$

Sehingga untuk $n > 1$, maka $n^4 + 4$ bukan prima.

Jelas untuk n = 1, $n^4 + 4 = 5\ (Prima)$

LATIHAN SOAL 1.a

1. (HSMC-USC, 2004) Tentukan solusi untuk persamaan

$$\sqrt{3 - x} + \sqrt{3 + x} = x$$

2. (UG-HSMT, 2005) Jika $x + \frac{1}{x} = 3$ maka nilai dari $x^4 + \frac{1}{x^4}$

3. (UG-HSMT, 2008) Hitunglah

$$\frac{(10^4 + 2^6)(18^4 + 2^6)(26^4 + 2^6)\,(34^4 + 2^6)(42^4 + 2^6)}{(6^4 + 2^6)(14^4 + 2^6)(22^4 + 2^6)\,(30^4 + 2^6)(38^4 + 2^6)}$$

4. Jumlah dari dua bilangan adalah -7 dan hasil kalinya 2. Tentukan: (i) jumlah kebalikannya (ii) jumlah kuadrat kedua bilangan tersebut

5. Jika a dan b memenuhi $\frac{2}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, tentukan nilai dari $\frac{a^2}{b^2}$
6. Diketahui x, y memenuhi $x + y = 9$ & $x^2 + xy + y^2 = 61$. Tentukan nilai dari $x^3 - y$ jika $x > y$
7. Diketahui x, y memenuhi $x - y = 10$ & $x^2 - 4xy + y^2 = 52$. Tentukan nilai dari $x^2 + y^2$
8. Tentukan bilangan bulat a, b sehingga $\sqrt{11 + \sqrt{72}} = a + \sqrt{b}$
9. Tentukan nilai dari
$$\sum_{i=1}^{2015} (-1)^i\, i$$
10. Tentukan nilai dari
$$T = (2+1)\,(2^2+1)\left(2^{2^2}+1\right)\left(2^{2^3}+1\right)\ldots\left(2^{2^{99}}+1\right)$$
11. Diketahui bahwa selisih bentuk
$$\sqrt{57 - 40\sqrt{2}} - \sqrt{57 + 40\sqrt{2}}$$
merupakan bilangan bulat, tentukan bilangan bulat tersebut.
12. (AIME, 1986) Hitunglah perkalian:
$$\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)\left(-\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7}\right)$$
13. Buktikan bahwa $3^{4^5} + 4^{5^6}$ dapat ditulis sebagai perkalian dua bilangan, dimana kedua bilangan tersebut lebih besar dari 10^{2015}
14. (HSMC-USC, 2014) Tentukan banyaknya solusi real yang memenuhi persamaan
$$\sqrt{x + 1 - 4\sqrt{x-3}} + \sqrt{x + 6 - 6\sqrt{x-3}} = 1$$
15. Tunjukkan bahwa
$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right]$$
16. (AIME, 1987) Hitunglah
$$\frac{(10^4+324)(22^4+324)(34^4+324)(46^4+324)(58^4+324)}{(4^4+324)(16^4+324)(28^4+324)(40^4+324)(52^4+324)}$$
17. (SMT, 2007) Berapakah faktor prima terbesar dari $4^9 + 9^4$?

b. Identitas yang melibatkan bentuk Kubik/Pangkat Tiga.

- $(a+b)^3 = (a+b)(a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$
- $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Contoh 1:

Jumlah dua bilangan adalah 2 dan hasil kalinya adalah 5. Tentukan jumlah kubik dari kedua bilangan tersebut.

Pembahasan:

Misalkan kedua bilangan tersebut x & y

$x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = 2^3 - 3(5)(2) = -22$

Contoh 2:

Tentukan semua bilangan prima yang berbentuk $x^3 - 1,\ x \in \mathbb{Z}^+$

Pembahasan:

Perhatikan bahwa

$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$

dan untuk $x \in \mathbb{Z}^+$ maka $x^2 + x + 1 > 1$

Hal ini berakibat pada kasus ini haruslah $x - 1 = 1,\ x = 2$

Jadi bilangan prima yang berbentuk $x^3 - 1$ hanya 7.

Contoh 3:

Tunjukkan bahwa

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

Pembahasan:

Kita menggunakan identitas:

$x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$ dua kali.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a+b)^3 + c^3 - 3ab(a+b) - 3abc \\ &= (a+b+c)^3 - 3(a+b)c(a+b+c) - 3ab(a+b+c) \\ &= (a+b+c)\,[(a+b+c)^2 - 3ac - 3bc - 3ab] \\ &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \end{aligned}$$

LATIHAN SOAL 1.b

1. (UG-HSMT, 2003) Jika $a + b = 1$ dan $a^3 + b^3 = 4$ maka nilai dari $a^4 + b^4$.
2. Jika $a^3 - b^3 = 24,\ a - b = 2,$ tentukan $(a+b)^2$.
3. Tentukan semua bilangan prima yang berbentuk $n^3 + 1$ dimana $n \in \mathbb{N}$
4. Bilangan x, y memenuhi $x^3 + y^3 = 126$ & $x^2 - xy + y^2 = 21$. Tentukan nilai $x^2 + y^2$.

5. Tentukan nilai dari $a^6 + a^{-6}$ jika $a^2 + a^{-2} = 4$.
6. Buktikan bahwa untuk $x \neq 1$ berlaku:
$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{80} = (x^{54} + x^{27} + 1)(x^{18} + +1)(x^6 + x^3 + 1)(x^2 + x + 1)$$
7. (HSMC-USC, 2012) Jika $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ maka tentukan nilai $\sin^3 x + \cos^3 x$
8. (HSMC-USC, 2008) Misalkan x dan y bilangan real dengan $x + y = 1$ dan $(x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = 12$. Tentukan nilai dari $x^2 + y^2$.
9. (HSMC-USC, 2007) Jika $x^2 + x + 1 = 0$ maka tentukan nilai dari $\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)^3$.
10. (HSMC-USC, 2004) Jika $a + b = 2$ dan $a^2 + b^2 = 5$ maka tentukan nilai dari $a^3 + b^3$.
11. (HSMC-USC, 2001) Misalkan x & y bilangan real sedemikian sehingga $(x^2 - y^2)(x^2 - 2xy + y^2) = 3$ dan $x - y = 1$. Tentukan nilai dari xy.
12. (HSMC-USC, 2000) Bilangan $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$ sama dengan ....

c. Identitas Aljabar Lanjutan

Kita telah mempunyai bentuk dasar identitas aljabar:
$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$
Lebih lanjut, kita mempunyai:

- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$
- $a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$

Bentuk umum dari identitas di atas adalah sebagai berikut

> Jika n bilangan bulat positif, maka
>
> $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

Bukti:

Pertama kita akan membuktikan bahwa untuk $x \neq 1$ berlaku
$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

Misalkan $S = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}$ maka

$xS = x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^n$. Jadi

$S - xS = (1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}) - (x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^n) = 1 - x^n$

$S(1 - x) = 1 - x^n;\quad S = \dfrac{1 - x^n}{1 - x}\quad (terbukti)$

Sekarang, kita subtitusikan $x = \frac{b}{a}$, maka

$$1 + \frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{b}{a}\right)^{n-1} = \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n}{1 - \frac{b}{a}}$$

$$\left(1 - \frac{b}{a}\right)\left(1 + \frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}\right) = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

$$a\left(1 - \frac{b}{a}\right)a^{n-1}\left(1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} + \cdots + \frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}\right) = a^n\left(1 - \frac{b^n}{a^n}\right)$$

$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1})$ (Terbukti)

> Jika x, y bilangan bulat $x \neq y$ dan n bilangan bulat positif maka $x - y$ habis membagi $x^n - y^n$.

Contoh 1:

Tanpa penghitungan dengan kalkulatir, kita mengetahui bahwa $781 = 1996 - 1215$ habis membagi $1996^5 - 1215^5$

Contoh 2:

Diketahui bahwa 1002004008016032 mempunyai faktor prima $p > 250000$, tentukan faktor prima tersebut.

Pembahasan:

Jika $a = 10^3$, $b = 2$ maka

$$1002004008016032 = a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5 = \frac{a^6 - b^6}{a - b}$$

Ekspresi terakhir ekuivalen:

$$\frac{a^6 - b^6}{a - b} = (a + b)(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$$
$$= 1002.1002004.998004$$
$$= 4.4.1002.250501.k$$

dimana $k < 250000$.

Jadi, $p = 250501$.

Berikut beberapa identitas lanjutan:

> Jika $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ suatu sukubanyak dengan koefisien bilangan bulat dan jika a, b bilangan bulat maka $b - 1$ habis membagi $f(b) - f(a)$.

Jika n bilangan bulat positif ganjil, maka

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Jika x, y bilangan bulat $x \neq y$ dan n bilangan bulat positif ganjil maka $x + y$ habis membagi $x^n + y^n$.

2. Ketaksamaan

a. Sifat Bilangan Kuadrat

Dalam bagian ini, akan kita bahas tentang sifat dasar dalam matematika. Sifat dasar ini sangat berguna dalam penyelesaian soal-soal olimpiade atau sejenisnya.

Untuk setiap bilangan real x, maka berlaku $x^2 \geq 0$

Kesamaan ini hanya berlaku jika dan hanya jika $x = 0$

Dari sifat di atas maka dapat ditulis yang lebih umum, yakni dalam bahasa matematika lebih dikenal dengan istilah **Sum of Square (S.o.S)**

$$\sum_{i=0}^{n} x_i^2 \geq 0$$

Kesamaan ini berlaku jika dan hanya jika $x_i = 0$ untuk semua i.

Contoh 1:

Buktikan bahwa $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

Pembahasan:

Perhatikan bahwa untuk setiap x, y bilangan real berlaku:

$$(x-y)^2 \geq 0$$

$$x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$$

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ terbukti.}$$

Contoh 2:

Tunjukkan bahwa $a + \frac{1}{a} \geq 2$ untuk setiap bilangan real a>0, dan akan merupakan kesamaan jika dan hanya jika a = 1.

Pembahasan:

Untuk setiap bilangan real a berlaku

$$a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2 \geq 0 \text{ sehingga } a^2 + 1 \geq 2a\text{. Karena a>0 maka } a + \frac{1}{a} \geq 2.$$

Selanjutnya, $a + \frac{1}{a} = 2 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 1$. (Terbukti)

Contoh 3:

Jika a bilangan real, buktikan bahwa $4a - a^4 \leq 3$.

Pembahasan:

Andaikan benar bahwa $4a - a^4 \leq 3$.

$$4a - a^4 \leq 3$$

$$a^4 - 4a + 3 \geq 0$$

$$(a^4 - 2a^2 + 1) + (2a^2 - 4a + 2) \geq 0$$

$$(a^2 - 1)^2 + 2(a-1)^2 \geq 0$$

Karena untuk setiap a bilangan real, berlaku $(a^2 - 1)^2 \geq 0$ dan $(a-1)^2 \geq 0$, Maka $(a^2 - 1)^2 + 2(a-1)^2 \geq 0$ adalah suatu yang benar atau equivalen dengan $4a - a^4 \leq 3$ adalah benar. (terbukti)

Contoh 4:

Bilangan real x dan y sedemikian sehingga $x + \frac{2}{y} = \frac{8}{3}$ dan $y + \frac{2}{x} = 3$. Nilai dari xy adalah ...

Pembahasan:

Kalikan kedua persamaan pada soal, maka kita peroleh:

$$xy + 4 + \frac{4}{xy} = 8 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = (xy)^2 - 4xy + 4 = (xy-2)^2$$

Jadi, jelas bahwa xy = 2.

LATIHAN SOAL 2.a

1. Dari sistem persamaan $x^2 + 6y = 7,\ y^2 - 4z = 1,\ \&\ z^2 - 10x = -46$ maka nilai dari $x + y + z$ sama dengan ....
2. Jika $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$, maka nilai dari $x + y + 2015 = \cdots$
3. Jika x, y bilangan real yang memenuhi persamaan $x^2 - 6x + \sqrt{y - 2x} = -9$ maka nilai dari $5x - y + 2015 = \cdots$
4. Nilai minimal dari $2x^2 + 4y^2 + 4xy - 2x - 12y + 2015$ adalah ...

5. Bilangan real x, y memenuhi persamaan $(403x - 2015)^2 + \sqrt{2x^2 + 10y - 2015} = 0$. Tentukan nilai dari $x + y = \cdots$
6. (SMT, 2009/Algebra Test) Tentukan kemungkinan nilai minimum dari $2x^2 + 2xy + 4y + 5y^2 - x$ untuk bilangan real x dan y.
7. (SMT, 2014/General Test) Misalkan ABC suatu segitiga sehingga $AB = 3, BC = 4, \& AC = 5$. Misalkan X adalah titik dalam segitiga. Hitunglah kemungkinan nilai terkecil untuk $AX^2 + BX^2 + CX^2$.
8. Buktikan untuk sebarang bilangan real a, b, c maka berlaku $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$
9. Bilangan real a, b, c yang memenuhi persamaan $ab + bc + ca = 2015$. Tentukan nilai terkecil dari $a^2 + b^2 + c^2$.
10. Bilangan real berbeda a, b, c yang memenuhi $(b - a)^2 = 4(b - c)(c - a)$. Tentukan nilai dari $\frac{b-c}{c-a} + 2015$.
11. (HSMC-USC, 2014) Jika a dan b bilangan positif dan (x, y) adalah titik pada kurva $ax^2 + by^2 = ab$, berapa kemungkinan nilai terbesar untuk xy?

b. Ketaksamaan Rataan Kuadrat (QM), Rataan Aritmatika (AM), Rataan Geometri (GM), dan Rataan Harmonik (HM)

Konsep tentang rataan kuadratik, aritmatika, geometri, dan harmonik ini sering digunakan dalam menyelesaikan soal-soal problem solving pada event olimpiade khususnya topik ketaksamaan. Untuk lebih jelasnya perhatikan penjelasan berikut: Untuk bilangan real positif a dan b, maka bentuk berikut $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, $\frac{a+b}{2}$, $\sqrt{ab}$, dan $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ berturut-turut disebut oleh rataan kuadrat (QM), rataan aritmatika (AM), rataan geometri (GM), dan rataan harmonik (HM). Secara umum, konsep tentang rataan ini, perhatikan teorema berikut:

Misalkan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bilangan real positif. Maka $QM \geq AM \geq GM \geq HM$, yakni

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

Kesamaan ini berlaku jika dan hanya jika $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$

Contoh 1:

a) Buktikan ketaksamaan AM-GM untuk 2 variabel (a dan b)

b) Buktikan ketaksamaan AM-GM untuk 3 variabel (a, b, dan c)

Pembahasan:

a) Kita akan tunjukkan bahwa $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

Perhatikan bahwa:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{1}{2}\left(a + b - 2\sqrt{ab}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$$

Jadi terbukti bahwa

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

b) Kita akan tunjukkan bahwa $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$

Perhatikan bahwa Kita mempunyai identitas cantik, silahkan dibuktikan "$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$"

Untuk $x, y, z \geq 0$ kita mempunyai

$$x + y + z \geq 0$$

dan $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{1}{2}[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2] \geq 0$

Sehingga kita peroleh:

$$(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \geq 0$$

Hal ini ekuivalen dengan

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geq 0 \leftrightarrow \ x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$$

Sekarang misalkan $x = a^{1/3},\ y = b^{1/3},\ z = c^{1/3}$ maka

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \ \leftrightarrow \ \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

Contoh 2:

Buktikan bahwa untuk sebarang bilangan real positif x dan y berlaku

$$x^4 + y^4 + 8 \geq 8ab$$

Pembahasan:

Dengan menggunakan AM-GM kita mempunyai

$$x^4 + y^4 + 8 = x^4 + y^4 + 4 + 4 \geq 4\sqrt[4]{x^4 y^4\, 4.\, 4} = 4.2\, xy = 8xy\ (Terbukti)$$

Contoh 3:

Buktikan bahwa untuk sebarang dua bilangan real positif a dan b berlaku

$$\frac{a+nb}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{ab^n}$$

Pembahasan:

Dengan menggunakan AM-GM pada bilangan $a, \underbrace{b, b, \ldots, b}_{n\ bilangan\ b}$

$$\frac{a+\underbrace{b+b+\cdots+b}_{n\ kali}}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{a\ \underbrace{b.b\ldots.b}_{n\ kali}}$$

$$\frac{a+nb}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{ab^n}\ (Terbukti)$$

Contoh 4:

Misalkan a dan b bilangan real sehingga $a > b > 0$. Tentukan kemungkinan nilai terkecil dari $a+\frac{1}{b(a-b)}$

Pembahasan:

Dengan menggunakan ketaksamaan AM-GM, kita peroleh

$$a+\frac{1}{b(a-b)} = (a-b)+b+\frac{1}{b(a-b)} \geq 3\sqrt[3]{(a-b)b\frac{1}{b(a-b)}} = 3.$$ Kesamaan ini

berlaku jika $a-b=b=\frac{1}{b(a-b)}$, yakni $a=2$ & $b=1$.

Jadi, nilai minimum yang mungkin untuk $a+\frac{1}{b(a-b)}$ adalah 3.

Contoh 5:

(SMT, Algebra/2007) Tentukan nilai minimum dari $xy+x+y+\frac{1}{xy}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ untuk $x,y>0$

Pembahasan:

Dengan menggunkan AM-GM, maka kita peroleh

$$\frac{xy+x+y+\frac{1}{xy}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{6} \geq \sqrt[6]{xy.xy.\frac{1}{xy}.\frac{1}{x}.\frac{1}{y}}$$

$$xy+x+y+\frac{1}{xy}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq 6$$

Jadi, nilai minimal $xy+x+y+\frac{1}{xy}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ adalah 6 dan tercapai saat x=y=1.

Contoh 6:

Buktikan bahwa untuk setiap bilangan real positif a, b, c, maka

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$$

Pembahasan:

Dengan menggunkan ketaksamaan AM-HM, maka kita peroleh

$$\frac{a+b+c}{3}\geq\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\rightarrow(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9.\ \text{(Terbukti)}$$

Contoh 7:

Diketahui empat bilangan positif a, b, c, d. Buktikan bahwa

$$\left(\frac{a+2b+3c+4d}{10}\right)^{10}\geq ab^2c^3d^4$$

Pembahasan:

Dengan menggunakan AM-GM pada bilangan $a, b, b, c, c, c, d, d, d, d$

$$\frac{a+b+b+c+c+c+d+d+d+d}{10}\geq\sqrt[10]{a\,b^2\,c^3\,d^4}$$

$$\left(\frac{1+2b+3c+4d}{10}\right)^{10}\geq ab^2c^3d^4\ \ (Terbukti)$$

LATIHAN SOAL 2.b

1. Bilangan real positif a dan b. Tentukan nilai terkecil $\frac{16}{a}+\frac{108}{b}+ab$
2. Tentukan nilai minimal dari $\frac{x}{3y}+\frac{y}{9z}+\frac{z}{8x}$ dan kapan nilai terkecil itu terjadi?
3. Jika x, y, z bilangan-bilangan real positip yang memenuhi $x+y+z=6$, maka tentukan nilai terbesar dari
   a. $x^2\,y^3\,z$
   b. $x\,yz$
4. a. Jika x, y, z bilangan-bilangan real positip yang memenuhi $x^2+xy+y^2=2015$, maka tentukan nilai terbesar dari $3x\,y$

   b. Jika x, y bilangan-bilangan real positip yang memenuhi $xy=8$, maka tentukan nilai terkecil dari $28\,x+14\,y$.
5. Volume prisma persegi panjang adalah 27 satuan volume, maka tentukan luas permukaan terkecil dari prisma tersebut
6. (OSK, 2014) Untuk $0<x<\pi$, nilai minimum dari

$$\frac{16\sin^2 x+9}{\sin x}=\cdots$$

7. (OSP 2009) Tentukan nilai minimal dari
$$\frac{9x^2 \sin^2 x + 4}{x \sin x}$$
untuk $0 < x < \pi$
8. (OSK, 2014) Diberikan fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$ yang didefinisikan pada himpunan bilangan real dengan $b > 0$. Jika $f(x)$ tidak pernah negatif, maka nilai terkecil yang mungkin untuk $\frac{a+c}{b}$ adalah ....
9. Tentukan nilai maksimum dari $x(1 - x^3)$ untuk $0 \le x \le 1$.
10. (HSMC-USC, 2012) Jika x dan y bilangan real positif yang tidak sama dengan1, Berapakah nilai terkecil non-negatif dari $\log_x(y) + \log_y(x)$?
11. (HSMC-USC, 2008) Di antara beberapa ketaksamaan berikut, manakah yang benar untuk semua bilangan real positif a dan b.
    i. $a^2 + b^2 \ge a + b$
    ii. $a^2 + b^2 \ge 2ab$
    iii. $a^2 + b^2 \ge ab$
    iv. $a^3 + b^3 \ge ab$

12. (CMC, 2003) Andaikan $x, y \in (-2,2)$ dan $xy = -1$. Maka nilai minimum dari $u = \frac{4}{4-x^2} + \frac{9}{9-x^2}$ adalah ....

13. (CMC, 2005) Misalkan k bilangan real sedemikian sehingga ketaksamaan $\sqrt{x-3} + \sqrt{6-x} \ge k$ mempunyai solusi. Nilai maksimum untuk k adalah ...

c. Ketaksamaan Cauchy-Schwarz

Berikut ini bentuk dari ketaksamaan Cauchy-Schwarz adalah

Untuk sebarang bilangan real $x_1, x_2, \dots, x_n$ & $y_1, y_2, \dots, y_n$ maka berlaku
$$(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) \ge (x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)^2$$

atau

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \ge \left(\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right)^2$$

Kesamaan terjadi saat $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \cdots = \frac{x_n}{y_n}$

Seorang matematikawan terkenal, yakni Mr. Titu Andreescu memodifikasi bentuk ketaksamaan Cauchy-Schwarz dengan cara substitusi bentuk $x_i = \frac{a_i}{\sqrt{b_i}}$ & $y_i = \sqrt{b_i}$ dan ketaksamaan ini dikenal dengan **Cauchy-Schwarz Engel (CS-Engel).** Untuk bilangan real a_i dan bilangan real positif b_i berlaku

$$\left(\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n}\right)(b_1+b_2+\cdots+b_n) \geq (a_1+a_2+\cdots+a_n)^2$$

$$atau$$

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$$

Kadang-kadang bentuk ketaksamaan Cauchy-Schwarz juga ditulis dalam bentuk:

> Untuk sebarang bilangan real positif $x_1, x_2, \ldots, x_n$ & $y_1, y_2, \ldots, y_n$ maka berlaku
>
> $$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i y_i}\right)^2$$

Contoh 1:

Kita mulai pada contoh ini, dengan membuktikan ketaksamaan Cauchy-Schwarz untuk $n = 2$, yakni $(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) \geq (x_1y_1 + x_2y_2)^2$

Pembahasan:

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}(x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2)-(x_1y_1+x_2y_2)^2 &= x_1^2y_1^2+x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2+x_2^2y_2^2-x_1^2y_1^2-2x_1x_2y_1y_2-x_2^2y_2^2\\ &= x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2-2x_1x_2y_1y_2\\ &= (x_1y_2-x_2y_1)^2 \geq 0\end{aligned}$$

Jadi, $(x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2)-(x_1y_1+x_2y_2)^2 \geq 0$, $(x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2) \geq (x_1y_1+x_2y_2)^2$

Contoh 2:

Buktikan ketaksamaan Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2$$

Pembahasan:

Perhatikan bahwa

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2$$
$$=\sum_{i,j} x_i^2 y_j^2-\sum_{i} x_i^2 y_i^2-2\sum_{i\neq j} x_i x_j y_i y_j$$
$$=\sum_{i\neq j} x_i^2 y_j^2-2\sum_{i\neq j} x_i x_j y_i y_j=\sum_{i\neq j}\left(x_i y_j-x_j y_i\right)^2\geq 0$$

Jadi,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)\geq\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2$$

LATIHAN SOAL 2.c

1. Misalkan $x, y, z > 0$ dan $x + y + z = 1$. Tentukan nilai terkecil dari

$$\frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{z+x}$$

2. (USAMO,1978) Diketahui a, b, c, d, e bilangan real sedemikian sehingga

$$\begin{cases} a+b+c+d+e=8 \\ a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=16 \end{cases}$$

Tentukan nilai maksimum nilai dari e.

3. Misalkan x & y bilangan real positif, Buktikan bahwa $8(x^4+y^4)\geq(x+y)^4$.

4. (CMC, 2003) Andaikan $\frac{3}{2}\leq x\leq 5$. Buktikan bahwa $2\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{15-3x}<2\sqrt{19}$

5. Tunjukkan untuk setiap bilangan real positif a, b, c, d berlaku

$$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}+\frac{16}{d}\right)\geq 100.$$

6. Misalkan $x, y, z > 0$ Buktikan bahwa

$$\frac{8}{x+y}+\frac{8}{y+z}+\frac{8}{z+x}\geq\frac{36}{x+y+z}$$

7. Jika a,b,c adalah bilangan real positif . Buktikan ketaksamaan

$$\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}\geq 1$$

8. (Ketaksamaan Nesbitt's) Jika a, b, c adalah bilangan real positif. Buktikan berlaku

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$

9. (APMO, 1991). Misalkan $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ adalah bilangan-bilangan real positif sehingga $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$. Tunjukkan bahwa

$$\frac{a_1^2}{a_1+b_1}+\frac{a_2^2}{a_2+b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+b_n}\geq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{2}$$

10. Jika $a, b, c > 0$ Buktikan bahwa

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}\geq\frac{a+b+c}{3}$$

11. Misalkan $a, b, c \geq 1$ merupakan bilangan real positif yang memenuhi

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2.$$

Buktikan bahwa

$$\sqrt{a+b+c}\geq\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1}$$

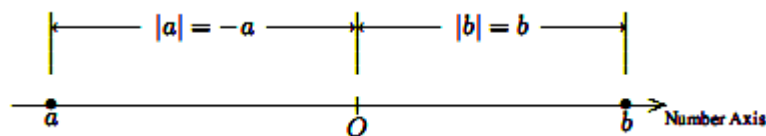
3. Nilai Mutlak

a. Definisi dan Sifat-Sifat Nilai Mutlak

Definisi Nilai Mutlak

Untuk sebarang bilangan real a, kita definisikan **nilai mutlak dari a**, yang disimbolkan dengan $|a|$:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}.$$

Secara geometri, sebarang bilangan real a dinotasikan oleh titik pada garis bilangan, dan nilai mutlak a adalah jarak titik yang menyatakan a dari titik origin pada garis bilangan (the number axis).

Secara umum, ekspresi $|a-b|$ menotasikan jarak antara titik-titik pada garis bilangan yang menyatakan bilangan a dan b.

Sifat-Sifat Nilai Mutlak

Berikut ini sifat-sifat tentang nilai mutlak:

a. $|x| \geq 0$

b. $|a| = |-a|$

c. $-|a| \leq a \leq |a|$

d. $|a| = |b|$ jika dan hanya jika $a = b\ atau\ a = -b$

e. $|a^n| = |a|^n$ untuk sebarang bilangan bulat positif n

f. $|ab| = |a||b|$

g. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|},\ b \neq 0$

h. $|a \pm b| \leq |a| + |b|$

i. $\sqrt{x^2} = |x|$

Contoh 1:

(OSP 2003) Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan $|x+2| + |3x| = 14$.

Pembahasan:

Perhatikan bahwa $|x+2| = \begin{cases} x+2, & x \geq -2 \\ -(x+2), & x < -2 \end{cases}$ dan $|3x| = \begin{cases} 3x, & x \geq 0 \\ -3x, & x < 0 \end{cases}$

- Untuk $x < -2$, maka persamaan menjadi $-x-2-3x = 14$ sehingga $x = -4$ (memenuhi)
- Untuk $-2 \leq x < 0$, maka persamaan menjadi $x+2-3x = 14$ sehingga $x = -6$ (tidak memenuhi)
- Untuk $x \geq 0$, maka persamaan menjadi $x+2+3x = 14$ sehingga $x = 3$ (memenuhi)

Jadi, Himpunan penyelesaian dari persamaan ini adalah $\{-4, 3\}$.

Contoh 2:

Apakah ada bilangan real x sedemikian hingga $\frac{|x-|x||}{x}$ adalah bilangan positif?

Pembahasan:

Jelas bahwa $x \neq 0$.

- Untuk $x \geq 0$, $\frac{|x-|x||}{x} = \frac{|x-x|}{x} = \frac{0}{x} = 0$.
- Untuk $x < 0$, $\frac{|x-|x||}{x} = \frac{|x+x|}{x} = \frac{|2x|}{x} = \frac{-2x}{x} = -2$.

Jadi, tidak ada bilangan real x sedemikian hingga $\frac{|x-|x||}{x}$ adalah bilangan positif.

Contoh 3:

Tentukan kondisi agar kesamaan ini berlaku: $\left|\frac{a-b}{a}\right| = \frac{b-a}{a}$.

Pembahasan:

Perhatikan bahwa: $a \neq 0$ dan $\left|\frac{a-b}{a}\right| = -\frac{a-b}{a}$, jadi $\frac{a-b}{a} \leq 0$.

Karena $\frac{a-b}{a} \leq 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{b}{a} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{b}{a} \geq 1$.

Jadi, kondisi a dan b agar persamaan pada soal berlaku adalah $\frac{b}{a} \geq 1$.

LATIHAN SOAL 3.a

1. Jika $x < \frac{3}{5}$ maka bentuk sederhana dari $\sqrt{25x^2 - 30x + 9} = \cdots$
2. Jika $|x + 2y| + (y + z - 2015)^2 = -\sqrt{z - 2014}$, maka tentukan nilai x yang mungkin.
3. (OSP, 2013/ OSP 2006/AHSME 1988) Jika $|x| + x + y = 10$ dan $x + |y| - y = 12$, maka nilai dari $x + y$ adalah ....
4. Jika x, y, z bilangan real tidak nol, tentukan kemungkinan nilai terbesar dari bentuk
$$\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} + \frac{z}{|z|}$$
5. Jika x, y, z adalah real yang memenuhi
$$(2015x + 4030)^2 + \left|\frac{1}{5}y - 8\right| + |z - 1| = 0$$
Tentukan nilai dari $z^{2015} + xy$
6. Diketahui bahwa $1 < x < 3$, sederhanakan bentuk $|x - 2| + 2|x|$
7. Sederhanakan bentuk $\big||x + 2| - 7\big| - \big|7 - |x - 5|\big|$ untuk interval $-2 < x < 5$
8. (AHSME, 1990) Tentukan banyaknya solusi real dari persamaan
$$|x - 2| + |x - 3| = 2015$$
9. Diketahui $|x + 2015| + |x - 2014| - |2x - 4030| = m$. Tentukan kemungkinan terbesar untuk m
10. Jika dua bilangan real x dan y yang memenuhi $|x + y| = x - y$. Tentukan nilai dari xy.
11. Diketahui a, b, c bilangan bulat $|a - b|^{2015} = 1 - |c - a|^{2015}$. Tentukan nilai dari $|c - a| + |a - b| + |b - c|$.

12. Diketahui $x = 2015$. Tentukan nilai dari
$$|2x^3 - 3x^2 - 2x + 1| - |2x^3 - 3x^2 - 3x - 2015|$$
13. a, b merupakan dua konstanta dengan $|a| > 0$. Jika persamaan $\big||x - a| - b\big| = 3$ mempunyai tiga solusi berbeda untuk x, tentukan nilai dari b.
14. Diketahui n bilangan real $x_1, x_2, \dots, x_n$ memenuhi $|x_i| < 1 \ (i = 1, 2, \dots, n)$ dan
$$|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| = 2015 + |x_1 + x_2 + \cdots + x_n|$$
Tentukan nilai minimum dari n.
15. Diketahui bilangan real a, b, c tidak nol dan $a + b + c = 0$. Tentukan nilai dari $x^{2015} - 2015x + 2015$ dimana $x = \frac{|a|}{b+c} + \frac{|b|}{a+c} - \frac{|c|}{a+b}$
16. (AHSME, 1977) Untuk a, b, c bilangan real tak nol, tentukan semua kemungkinan nilai dari
$$\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{abc}{|abc|}$$

b. Persamaan Nilai Mutlak

Untuk menyelesaikan persamaan linear yang melibatkan nilai mutlak, kita harus mengubah tanda nilai mutlak dalam persamaan.

Dalam kasus yang paling sederhana, $|P(x)| = Q(x)$, dimana $P(x), Q(x)$ dua ekspresi dengan $Q(x) \geq 0$, dengan sifat-sifat nilai mutlak, kita dapat mengubah tanda nilai mutlak dengan menggunakan bentuk equaivalennya:

$P(x) = Q(x)$ atau $P(x) = -Q(x)$ atau $P^2(x) = Q^2(x)$

Contoh 1:

Selesaikan persamaan $|x - 1| = 3$.

Pembahasan:

Alternatif 1,

Berdasarkan pengertian nilai mutlak didapat:

Jika $x \geq 1$, maka $x - 1 = 3$, sehingga $x = 4$ (memenuhi persamaan)

Jika $x < 1$, maka $1 - x = 3$, sehingga $x = -2$ (memenuhi persamaan).

Jadi, nilai x yang memenuhi: $x = -2$ *atau* $x = 4$.

Alternatif 2,

Karena $|x-1|$ bernilai tak negatif maka selesaiannya dapat dilakukan dengan mengkuadratkan kedua ruas.

$(x-1)^2 = 9$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$

$\Leftrightarrow x = -2,\ x = 4$

Jadi, nilai x yang memenuhi: $x = -2 \text{ atau } x = 4$.

Contoh 2:

Selesaikan persamaan $|x - |3x+1|| = 4$.

Pembahasan:

Berdasarkan definisi, maka kita peroleh:

$x - |3x+1| = 4$ atau $x - |3x+1| = -4$.

Dari $x - |3x+1| = 4$, kita punya

$$0 \le x - 4 = |3x+1| \Leftrightarrow -x + 4 = 3x + 1 \text{ atau } x - 4 = 3x + 1.$$

Jadi, $x = \frac{3}{4} \text{ atau } x = -\frac{5}{2}$, ini kontradiksi dengan $x \ge 4$ sehingga dua solusi tersebut tidak ada yang memenuhi.

Dari $x - |3x+1| = -4$, kita punya

$$0 \le x + 4 = |3x+1| \Leftrightarrow -x - 4 = 3x + 1 \text{ atau } x + 4 = 3x + 1.$$

Jadi, $x = \frac{-5}{4}$ atau $x = \frac{3}{2}$. Dua solusi tersebut memenuhi persamaan pada soal karena nilai x tersebut terletak pada selang $(x + 4 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -4)$.

Jadi, selesaian dari persamaan tersebut pada soal adalah $x_1 = -\frac{5}{4},\ x_2 = \frac{3}{2}$.

Contoh 3:

Jika $\left| |4m+5| - b \right| = 6$ adalah persamaan dalam m, dan persamaan tersebut memiliki 3 solusi berbeda, tentukan nilai bilangan rasional b.

Pembahasan:

Dari persamaan yang diketahui kita memiliki (i) $|4m+5| - b = 6$ atau (ii) $|4m+5| - b = -6$.

Jika (i) memiliki tepat satu solusi, maka $b+6=0$ (b = -6) yang mengakibatkan (ii) menjadi $|4m+5|=-12$ (tidak memiliki solusi untuk m), jadi $b\neq -6$. .

Jika (i) memiliki tepat dua solusi dan (ii) memiliki tepat satu solusi, jadi $b-6=0$ (b =6). Jika b= 6, maka (i) menjadi $|4m+5|=12$,

$$4m+5=12 \;\; atau \;\; 4m+5=-12,$$

$$m=\frac{7}{4} \; atau \;\; m=-\frac{17}{4}, \text{ dan dari (ii) } m=-\frac{5}{4}.$$

Jadi, nilai b = 6.

Contoh 4:

Jika $|x+1|+(y+2)^2=0$ dan $ax-3ay=1$, tentukan nilai dari a.

Pembahasan:

Karena $|x+1|\geq 0$ dan $(y+2)^2\geq 0$ untuk semua nilai x dan y, jadi $x+1=0$ & $y+2=0$ yaitu, $x=-1$, $y=-2$. Substitusikan nilai tadi ke persamaan $ax-3ay=1$, maka kita peroleh $a=\frac{1}{5}$.

LATIHAN SOAL 3.b

1. Selesaikan persamaan $\left|\left||x|-2016\right|-2015\right|=2017$
2. Selesaikan persamaan
$$|x-1|+2|x|-3|x+1|-|x+2|=x$$
3. Berapa banyak pasangan bilangan bulat (x,y) yang memenuhi persamaan
$$|xy|+|x-y|=1?$$
4. Jika $|x+1|-|x-3|=a$ adalah persamaan dalam variabel x dan persamaan ini mempunyai takhingga solusi, maka tentukan nilai dari a.
5. Selesaikan persamaan $|5x-4|+2x=3$
6. a adalah bilangan bulat yang memenuhi persamaan
$$|2a+5|+|2a-1|=2015$$
Maka banyaknya solusi untuk a adalah ...
7. (AHSME, 1984) Banyaknya bilangan bulat x berbeda yang memenuhi persamaan
$$\left|x-|2x+1|\right|=3$$

adalah ....

8. Jika persamaan $\left||x-2|-1\right| = a$ mempunyai tepat tiga solusi bulat untuk variabel x, maka tentukan nilai a yang mungkin.

9. (OSP, 2006) Diberikan fungsi $f(x) = \left||x-2|-a\right|-3$. Jika grafik f memotong sumbu-x tepat di tiga titik, maka nilai a sama dengan ....

10. Jika persamaan

$$\frac{a}{2015}|x| - x - 2015 = 0$$

hanya mempunyai solusi negatif untuk x, tentukan range untuk nilai a.

11. Selesaikan sistem

$$\begin{cases} |x-2y| = 1 \\ |x| + |y| = 2 \end{cases}$$

12. Selesaikan sistem persamaan

$$\begin{cases} x + 3y + |3x - y| = 19 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$$

c. Ketaksamaan Nilai Mutlak

Teknik yang paling penting untuk menyelesaikan ketaksamaan nilai mutlak adalah sama saja dengan menyelesaikan persamaan nilai mutlak yaitu cukup mengubah tanda nilai mutlak, sedemikian hingga ketaksamaan tersebut menjadi ketaksamaan normal untuk diselesaikan.

Metode Dasar untuk Mengubah Tanda Nilai Mutlak

(i) $|a| \le b$ ekuivalen dengan $-b \le a \le b$.
Jika $b < 0$, maka $-b \le a \le b$ tidak mempunyai solusi untuk a.

(ii) $|a| \ge |b|$ ekuivalen dengan $a^2 \ge b^2$.

(iii) $|a| \ge b$ ekuivalen dengan $a \le -b$ atau $a \ge b$

(iv) Untuk mensederhanakan ketaksamaan yang diketahui dan mengubah tanda nilai mutlak, harus menggunakan metode substitusi variabel seperti $y = |x|$.

(v) Jika dua atau lebih pasang tanda mutlak ada pada ”layer” yang sama dari ketaksamaan yang diketahui, metode umum untuk mengubah tanda nilai mutlak adalah mempartisi range dari variabel kedalam beberapa interval. Untuk ini, kita cukup memisalkan **pembuat nol masing ekspresi, dan mengambil akar-akar ini menjadi titik-titik partisinya**. Sebagai contoh:

$|x-2|+|x-4|<3,$

maka garis bilangan dipartisi menjadi 3 interval yaitu: $(-\infty, 2], (2, 4], \ \& \ (4, \infty)$, dimana 2 dan 4 diperoleh dengan cara menjadi pembuat nol berturut-turut untuk $x-2$ dan $x-4$.

Contoh 1:

Selesaikan ketaksamaan dari $|x^2-2x+5|<4$.

Pembahasan:

$$|x^2-2x+5|<4 \quad \Leftrightarrow -4<x^2-6x+5<4$$

$$\Leftrightarrow 0<x^2-6x+9 \text{ dan } x^2-6x+1<0$$

Dari $0<x^2-6x+9 \Rightarrow (x-3)^2>0 \Rightarrow x\neq 3$, dan

Dari $x^2-6x+1<0 \Rightarrow 3-2\sqrt{2}<x<3+2\sqrt{2}$.

Jadi, himpunan selesaiannya adalah $\{3-2\sqrt{2}<x<3+2\sqrt{2}\}-\{3\}$

Contoh 2:

Tentukan himpunan selesaian dari ketaksamaan $\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\leq 1$.

Pembahasan:

Jelas bahwa $x\neq 1$ dan $|x-1|>0$, sehingga kita peroleh:

$$\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\leq 1 \quad \Leftrightarrow |x+1|\leq |x-1|$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2\leq (x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x+1\leq x^2 2x+1 \ \Leftrightarrow 4x\leq 0 \ \Leftrightarrow x\leq 0.$$

Jadi, himpunan selesaiannya adalah $\{x\leq 0\}$.

Contoh 3:

Tentukan himpunan selesaian dari ketaksamaan $|x^2-x|>2$.

Pembahasan:

Karena $|x^2-x|>2 \Leftrightarrow x^2-x<-2 \ \textit{atau} \ x^2-x>2$.

Dari $x^2 - x < -2 \Leftrightarrow x^2 - x + 2 < 0$. Ketaksamaan ini tidak memiliki solusi real (mengapa?)

Dari $x^2 - x > 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) > 0 \Leftrightarrow x < -1 \, atau \; x > 2$.

Jadi, himpunan selesaiannya adalah $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$.

Contoh 4:

Selesaikan ketaksamaan dari $x^2 - 2x - 5|x-1| + 7 \le 0$.

Pembahasan:

$x^2 - 2x - 5|x-1| + 7 = (x^2 - 2x + 1) - 5|x-1| + 6 = (x-1)^2 - 5|x-1| + 6,$

Misal $y = |x-1|$, ketaksamaan yang diketahui menjadi:

$$y^2 - 5y + 6 \le 0$$
$$(y-2)(y-3) \le 0$$
$$\therefore \; 2 \le y \le 3 ....(*)$$

Susbtitusikan $y = |x-1|$ ke (*), kita peroleh bentuk:

$$2 \le |x-1| \le 3.$$

Dari $2 \le |x-1|$, maka $x - 1 \le -2 \; atau \; x - 1 \ge 2$, jadi solusinya adalah $x \le -1 \, atau \; x \ge 3$ ....(**)

Dari $|x-1| \le 3$, maka $-3 \le x - 1 \le 3$, jadi solusinya adalah $-2 \le x \le 4$. .....(***)

Dari (**) dan (***) kita iriskan, maka solusi dari ketaksamaan pada soal adalah $-2 \le x \le -1$ atau $3 \le x \le 4$

LATIHAN SOAL 3.c

1. Selesaikan ketaksamaan $|3x^2 - 2| < 1 - 4x$
2. Selesaikan ketaksamaan
$$\frac{3x^2 - 8|x| - 3}{x^2 + 2x + 3} \ge 0$$
3. Selesaikan ketaksamaan $2|x| - |x-2| \ge 0$
4. Selesaikan ketaksamaan $|2x-1| - |x+1| > 2$
5. (AHSME, 1964) Jika x bilangan real dan $|x-4| + |x-3| < a$ dimana a bilangan positif, tentukan nilai a yang memenuhi ketaksamaan tersebut
6. Tentukan nilai x yang memenuhi $|x^2 + x + 1| \le 1$

7. Tentukan himpunan selesaian dari ketaksamaan

$$\left|\frac{x+1}{x-1}\right| \geq 1$$

8. Selesaikan ketaksamaan $|x^2-4x-5| > x^2-4x-4$
9. Selesaikan ketaksamaan berikut:
   a. $\frac{6}{|x|+1} < |x|$
   b. $\frac{1-|x|}{3|x|-6} > 0$
10. Selesaikan ketaksamaan:

$$\frac{|x|}{x} < |x^2-1| \;\; (x \neq 0)$$

11. (HSMC-USC, 2006) Berapa banyak bilangan real x yang memenuhi ketaksamaan

$$|x^4-4x^2-6| \geq |x^4-4x^2+14|$$

4. Polinomial

Definisi Polinomial

Misalkan ρ menyatakan sistem bilangan real atau sistem bilangan rasional dan n merupakan bilangan bulat non-negatif.

Bentuk $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$

dengan $a_0, a_1, ..., a_n \in \rho$ dan $a_n \neq 0$ disebut polinomial atas ρ berderajat n. Kemudian dua buah polinomial berderajat tidak nol dikatakan identik atau sama jika derajatnya sama dan koefisien dengan x berpangkat sama juga sama. Jadi, dua polinomial $f(x)$ dan $g(x)$ dengan

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ dan $g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0$

dikatakan identik $(f(x) = g(x))$ untuk setiap x jika $n = m$ dan

$a_n = b_m, a_{n-1} = b_{m-1}, ..., a_1 = b_1, \& \; a_0 = b_0$.

Nilai suatu Polinomial

Contoh 1:

Hitunglah $f(5)$ jika $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 3x + 2$.

Pembahasan:

$f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 3x + 2 \rightarrow f(5) = 2.5^3 + 4.5^2 - 3.5 + 2 = 337$

Contoh 2:

Jika $p(x)$ merupakan sukubanyak derajat tiga dengan $p(1) = 1, p(2) = 2, p(3) = 3,\; p(4) = 5$. Tentukan $p(6)$.

Pembahasan:

Misalkan $g(x) = p(x) - x$.

Perhatikan bahwa $g(x)$ adalah sukubanyak yang berderajat 3 dan

$$g(1) = g(2) = g(3) = 0.$$

Sehingga $g(x) = c(x-1)(x-2)(x-3)$, untuk suatu konstanta c.

$g(4) = c(4-1)(4-2)(4-3) = 6c.$

$dan \quad g(4) = p(4) - 4 = 1.$

Sehingga, $c = 1/6.$

Akhirnya:

$$p(6) = g(6) + 6 = \frac{(6-1)(6-2)(6-3)}{6} + 6 = 16.$$

Contoh 3:

(HSMC-USC 2001) Diketahui identitas sukubanyak

$$x^6 + 1 = (x^2+1)\,(x^2+ax+1)(x^2+bx+1)$$

Berapa nilai dari ab?

Pembahasan:

Jika perkalian $(x^2+1)\,(x^2+ax+1)(x^2+bx+1)$ dijabarkan maka koefisien dari x^2 adalah $ab+3$.

Sehingga $ab = -3$.

LATIHAN SOAL 4.(1)

1. (HSMC-USC, 1998) Andaikan untuk suatu bilangan $a, b, \&\, k$ kita mempunyai faktorisasi

   $$x^4 + 2x^3 + kx^2 - x + 2 = (x^2+ax+1)(x^2+bx+2)$$

   Berapakah nilai k yang memenuhi?
2. (HSMC-USC, 2000) Tentukan nilai k dalam identitas sukubanyak berikut

   $$(x^3 - x^2 - 5x - 2)(x^4 + x^3 + kx^2 - 5x + 2) = x^7 - 4x^5 - 14x^4 - 5x^3 + 19x^2 - 4$$
3. Misalkan $f(x) = ax^7 + bx^3 + cx - 2015$, dimana a, b, dan c konstanta. Jika $f(-7) = 5$, maka $f(7) = \cdots$
4. (HSMC-USC, 1998) Misalkan $P(x)$ adalah sebuah sukubanyak derajat empat sehingga $P(2) = P(-2) = P(-3) = -1$ dan $P(1) = P(-1) = 1$. Tentukan nilai dari $P(0)$.

5. (SMT, 2012) Sukubanyak quartic (berderajat 4) $P(x)$ memenuhi $P(1) = 0$ dan mencapai maksimum saat $x = 2$ & $x = 3$, adapun nilai maksimumnya adalah 3. Hitunglah $P(5)$
6. (HSMC-USC, 2008) Diketahui bahwa sukubanyak $P(x^2+1) = x^4 + 5x^2 + 3$, berapakah $P(x^2-1)$?
7. (HSMC-USC, 2005) Misalkan $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ dimana $a, b, c, \& \ d$ bilangan real. Andaikan grafik dari $y = f(x)$ memotong grafik dari $y = 2x - 1$ di $x = 1, 2, \& \ 3$. Berapakah nilai dari $f(0) + f(4)$?
8. Sukubanyak derajat dua, $P(x)$ mempunyai sifat-sifat berikut: (i) $P(x) \geq 0$ untuk semua bilangan real x, (ii) $P(2016) = 0$, (iii) $P(2017) = 2$. Tentukan nilai dari $P(2015)$.
9. Diketahui $f(x) = (x^5 - 1)(x^3 + 1)$, $g(x) = (x^2 - 1)(x^2 - x + 1)$ dan $h(x)$ adalah sukubanyak sehingga $f(x) = g(x).h(x)$. Tentukan nilai dari $h(1)$.
10. Diketahui bahwa $Q(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{15}$. Jika $Q(x)$ dapat dinyatakan sebagai $(x^a+1)(x^b+1)(x^c+1)(x^d+1)$, dimana $a > b > c > d$ dan $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+$. Tentukan nilai dari $a^2 + b^3 + c^6 + d^{2015}$.
11. Tentukan jumlah dari semua koefisien dari sukubanyak setelah dijabarkan dan dikelompokkan dalam suku yang sama pada perkalian berikut
$$(2 - 2x^2 + x^3)^{2014} . (1 - x^5 - x^6)^{2015}$$
12. Diketahui
$$h(x) = \frac{1}{x^{2015} + a_{2014}x^{2014} + \cdots + a_1 x + a_0}$$
Jika
$$h(1) = \frac{1}{2}, h(2) = \frac{1}{3}, h(3) = \frac{1}{4}, \ldots . h(2015) = \frac{1}{2016}$$
Maka nilai dari $h(2016)$.

Teorema Sisa dan Faktor

Sebelum kita membahas tentang teorema sisa, kita bahas dahulu ***Algoritma Pembagian*** sukubanyak:

> Jika sukubanyak $P(x)$ dibagi oleh $H(x)$ maka ada sukubanyak $Q(x), r(x)$ sehingga
> $$P(x) = H(x)Q(x) + r(x)$$
> dan $0 \leq \deg r(x) < \deg H(x)$

Contoh 1:

Jika $x^5 + x^4 + 1$ dibagi oleh $x^2 + 1$, maka tuliskan dalam bentuk $P(x) = H(x)Q(x) + r(x)$

Pembahasan:

Perhatikan bahwa

$$x^5 + x^4 + 1 = (x^3 + x^2 - x - 1)(x^2 + 1) + (x + 2)$$

Dimana,

Hasil bagi : $H(x) = x^3 + x^2 - x - 1$

Sisa pembagian : $r(x) = x + 2$

Contoh 2:

Tentukan sisa ketika $(x + 3)^5 + (x + 2)^8 + (5x + 9)^{1997}$ dibagi oleh $x + 2$

Pembahasan:

Karena pembaginya berderajat 1, maka sisa pembagiannya adalah sukubanyak berderajat 0, yakni suatu konstanta. Sehingga

$$(x + 3)^5 + (x + 2)^8 + (5x + 9)^{2014} = q(x)(x + 2) + r$$

Misalkan $x = -2$, maka kita memperoleh:

$$(-2 + 3)^5 + (-2 + 2)^8 + (5(-2) + 9)^{2014} = q(-2)\,(-2 + 2) + r = r$$

$$r = 2$$

Jadi, sisanya adalah 2.

Contoh 3:

Suatu sukubanyak memiliki sisa – 2 ketika dibagi oleh $(x - 1)$ dan berisa – 4 ketika dibagi oleh $(x + 2)$. Tentukan sisa ketika sukubanyak tersebut dibagi oleh $x^2 + x - 2$.

Pembahasan:

Dari informasi yang diketahui dalam soal, ada sukubanyak $q_1(x),\ q_2(x)$ dengan

$$P(x) = q_1(x)(x - 1) - 2$$

$$P(x) = q_2(x)(x + 2) - 4$$

Sehingga,

$$P(1) = -2 \ \&\ P(-2) = -4$$

Perhatikan bahwa:

$x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$ adalah sukubanyak berderajat 2, maka

Sisa pembagian P(x) oleh $x^2 + x - 2$ adalah sukubanyak berderajat maksimal 1, yakni $r(x) = ax + b$

Berdasarkan algoritma pembagian:

$$P(x) = q(x)(x^2 + x - 1) + (ax + b)$$

Oleh sebab itu, kita memperoleh

$$-2 = P(1) = a + b$$
$$-4 = P(-2) = -2a + b$$

Dengan menyelesaikan dua persamaan terakhir, kita peroleh $a = \frac{2}{3}$ & $b = -\frac{8}{3}$

Jadi, sisa yang diminta adalah $\frac{2}{3}x - \frac{8}{3}$.

> **Teorema Sisa**
>
> Jika sukubanyak $f(x)$ dibagi oleh $(x - a)$ maka sisanya adalah $f(a)$

Contoh 4:

Tentukan sisa pembagian ketika $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 1$ dibagi oleh:

(i) $x - 3$

(ii) $2x + 1$

Pembahasan:

(i) Berdasarkan teorema sisa, maka

Sisa pembagiannya sama dengan $P(3) = 2.3^3 + 3.3^2 - 3 + 1 = 79$

(ii) Berdasarkan teorema sisa, maka

Sisa pembagiannya sama dengan

$$P\left(\frac{-1}{2}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 2$$

> **Teorema Faktor**
>
> Sukubanyak $f(x)$ habis dibagi oleh $(x - 1)$ jika dan hanya jika a merupakan akar dari $f(x)$ atau dengan kata lain $f(x)$ mempunyai faktor $(x - a)$ jika dan hanya jika $f(a) = 0$.

Contoh 5:

Tunjukkan bahwa $(3x - 2)$ adalah faktor dari $P(x) = 12x^3 + 40x^2 + 13x - 30$

Pembahasan:

Untuk menunjukkan bahwa $(3x - 2)$ faktor dari P(x), maka berdasarkan teorema faktor, kita cukup membuktikan bahwa $P\left(\frac{2}{3}\right) = 0$

Perhatikan bahwa

$$P\left(\frac{2}{3}\right) = 12\left(\frac{2}{3}\right)^3 + 40\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 13\left(\frac{2}{3}\right) - 30$$
$$= 12.\frac{8}{27} + 40.\frac{4}{9} + 13.\frac{2}{3} - 30$$

$$= \frac{96 + 480 + 234 - 810}{27} = 0$$

Jadi, terbukti bahwa $(3x-2)$ adalah faktor dari $P(x)$

Untuk suatu polinomial dengan koefisien bilangan bulat, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ jika polinomial ini mempunyai faktor $\left(x - \frac{p}{q}\right)$ dimana $FPB(p,q) = 1$, maka p faktor dari a_0 dan q faktor dari a_n .

LATIHAN SOAL 4.(2)

Teorema Sisa

1. (AHSME/1980) Derajat dari $(x^2+1)^4(x^3+1)^3$ sebagai sukubanyak dalam x sama dengan ...
2. Misalkan $f(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Tentukan sisa pembagian ketika $f(x^7)$ ketika dibagi oleh $f(x)$.
3. Sukubanyak $P(x) = 8x^3 + ax^2 + bx - 9$ memberikan sisa berturut-turut – 95 dan 3 ketika dibagi oleh $(x+2)$ & $(2x-3)$. Tentukan nilai dari $a+b$.
4. (HSMC-USC, 2011) Berapa sisa ketika $x^{51} + 51$ dibagi oleh $x+1$?
5. (HSMC-USC, 1998) Berapa sisa ketika $x^{200} - 2x^{199} + x^{50} - 2x^{49} + x^2 + x + 1$ ketika dibagi oleh $(x-1)(x-2)$?
6. (HSMC-USC, 2010) Berapa banyak sukubanyak $P(x)$ yang memenuhi kondisi $P(12) = 12!$ dan $xP(x-1) = (x-12)P(x)$?
7. Tentukan sisanya ketika $x^{2015} - x^{2014} + (x+1)^2$ dibagi oleh $x^2 - 1$.
8. Tentukan sisanya jika $(x-1)^{2015} + (x-2)^{2015}$ dibagi oleh $x^2 - 3x + 2$
9. (HSMC-USC, 2006) Tentuka sisa pembagian sukubanyak ketika $P(x) = x^{2006} - x^{2005} + (x+1)^2$ dibagi oleh $x^2 - 1$
10. Sukubanyak $P(x)$ memenuhi $P(-x) = -P(x)$. Ketika $P(x)$ dibagi oleh $(x-3)$ bersisa 6. Tentukan sisa ketika $P(x)$ dibagi oleh $x^2 - 9$.
11. (AHSME/1977) Misalkan $g(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Berapakah sisa pembagian ketika polinom $g(x^{12})$ dibagi oleh polinom g(x)?
12. Sukubanyak $f(x)$ dibagi $(x+1)$ sisa – 2 dan jika dibagi $(x-3)$ sisa 7. Sukubanyak $g(x)$ dibagi $(x+1)$ sisa 3 dan jika dibagi $(x-3)$ bersisa 2. Jika $h(x) = f(x).g(x)$, maka tentukan sisa pembagian $h(x)$ oleh $(x^2 - 2x - 3)$

13. Sukubanyak berderajat 3, $P(x)$, jika $P(x)$ dibagi $(x^2 + 2x - 3)$ bersisa $(3x - 4)$, jika $P(x)$ dibagi oleh $(x^2 - x - 2)$ bersisa $(2x + 3)$. Tentukan persamaan $P(x)$ tersebut.

Teorema Faktor

1. Tentukan nilai m ketika $P(x) = x^4 + 5x^3 + mx + 2$ habis dibagi oleh $(x + 2)$
2. (AHSME/1970) Jika dua faktor dari $2x^3 - hx + k$ adalah (x+2) dan (x-1), maka nilai dari $|2h - 3k|$ adalah ...
3. Sukubanyak $P(x)$ mempunyai koefisien bilangan bulat dan $P(x) = 7$ untuk empat nilai x yang berbeda. Tunjukkan bahwa $P(x) \neq 14$.
4. (AHSME/1980) Untuk suatu bilangan real r, sukubanyak $8x^3 - 4x^2 - 42x + 45$ habis dibagi oleh $(x - r)^2$. Tentukan nilai dari $\lfloor r \rfloor$. *Dimana $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat yang kurang dari atau sama dengan x.*
5. Diketahui $(x - 2)$ adalah faktor sukubanyak $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 2$. Jika $f(x)$ dibagi oleh $(x + 3)$ maka sisa pembagiannya – 50 . Tentukan nilai dari $a + b$
6. (SMT, 2011) Misalkan $P(x)$ sukubanyak berderajat 2011 sedemikian sehingga $P(1) = 0, P(2) = 1, P(4) = 2, \ldots . P(2^{2011}) = 2011$. Hitunglah koefisien dari suku x dalam $P(x)$
7. (SMT, 2008) Berapa banyak sukubanyak monik $P(x)$ sedemikian sehingga
$$P(x)Q(x) = x^4 - 1$$
untuk suatu sukubanyak $Q(x)$ yang lain dimana koefisien P dan Q adalah bilangan kompleks.

Teorema Vi'eta

Sebelum kita membahas lebih jauh tentang bagaimana wujud dari teorema Vi'eta, perhatikan dahulu contoh berikut:

Contoh 1:

Jabarkan perkalian $(x + 1)(x - 2)(x + 4)(x - 5)(x + 6)$

Pembahasan:

Hasil perkalian pada soal adalah sukubanyak berderajat 5.

- Untuk mendapatkan koefisien x^5 kita hitung dari koefisien dari x dalam masing-masing faktor, Koef. $x^5 = 1$

- Untuk mendapatkan koefisien x^4 kita hitung:

  Koef. $x^4 = 1 - 2 + 4 - 5 + 6 = 4$
- Untuk mendapatkan koefisien x^3 kita hitung:

  Koef. $x^3 = 1.(-2) + 1.4 + 1.(-5) + 1.6 + (-2).4 + (-2)(-5) + (-2)6 + 4.(-5) + 4.6 + (-5).6 = -33$
- Untuk mendapatkan koefisien x^2 kita hitung:

  Koef. $x^2 = 1.(-2).4 + 1(-2)(-5) + 1.(-2).6 + 1.4(-5) + 1.4.6 + (-2).4(-5) + (-2).4.6 + 4.(-5).6 = -134$
- Untuk mendapatkan koefisien x kita hitung:

  Koef. $x = 1.(-2).4.(-5) + 1.(-2).4.6 + 1.4.(-5).6 + (-2).4.(-5).6 = 172$
- Untuk mendapatkan suku konstanta $= 1.(-2).4.(-5).6 = 240$

Jadi, hasil perkalian yang diminta adalah $x^5 + 4x^4 - 33x^2 + 172x + 240$

Jika $a_n \neq 0$ dan

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

merupakan sukubanyak dengan akar-akar $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ maka dapat kita tulis dalam bentuk:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n(x-\beta_1)(x-\beta_2)\dots(x-\beta_{n-1})(x-\beta_n)$$

Dari bentuk ini, kita dapat menformulasi tentang **rumus Vi'eta**

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \qquad \sum_{1\le j<k\le n} \beta_j\beta_k = \frac{a_{n-2}}{a_n}, \qquad \sum_{1\le j<k<l\le n} \beta_j\beta_k\beta_l = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

$$\sum_{1\le j<k<l<s\le n} \beta_j\beta_k\beta_l\beta_s = \frac{a_{n-4}}{a_n} \dots\dots\dots\dots\dots, \qquad \beta_1\beta_2\dots\beta_n = (-1)^n\frac{a_0}{a_n}$$

Beberapa rumus berkaitan dengan teorema Vi'eta:

1) $\beta_1^2 + \beta_2^2 = (\beta_1+\beta_2)^2 - 2\beta_1\beta_2$
2) $\beta_1^3 + \beta_2^3 = (\beta_1+\beta_2)^3 - 3\beta_1\beta_2(\beta_1+\beta_2)$
3) $\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = (\beta_1+\beta_2+\beta_3)^2 - 2(\beta_1\beta_2 + \beta_1\beta_3 + \beta_2\beta_3)$
4) $\beta_1^3 + \beta_2^3 + \beta_3^3 = (\beta_1+\beta_2+\beta_3)^3 - 3(\beta_1\beta_2 + \beta_1\beta_3 + \beta_2\beta_3)(\beta_1+\beta_2+\beta_3) + 3\beta_1\beta_2\beta_3$

Contoh 2:

Tentukan jumlah dari akar-akar, jumlah dari kombinasi dua-dua-an akar-akar, jumlah dari kuadrat akar-akar dan jumlah dari kebalikan akar-akar dari persamaan $2x^3 - x + 2 = 0$

Pembahasan:

Misalkan a, b, c adalah akar-akar persamaan $2x^3 - x + 2 = 0$

Berdasarkan rumus vieta:

$$a + b + c = -\frac{0}{2} = 0, \quad ab + ac + bc = \frac{-1}{2}$$

Untuk mendapatkan $a^2 + b^2 + c^2$ perhatikan bahwa

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc) = 0^2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$$

Untuk mendapatkan $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ perhatikan bahwa;

$abc = -\frac{2}{2} = -1.$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab + ac + bc}{abc} = \frac{-1/2}{-1} = \frac{1}{2}$$

Contoh 3:

Misalkan a, b, c adalah akar-akar dari $x^3 - x^2 + 1 = 0$. Tentukan nilai dari

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

Pembahasan:

Berdasarkan rumus vieta, maka

$$a + b + c = -\frac{-1}{1} = 1$$

Dari bentuk $x^3 - x^2 + 1 = 0$ kita peroleh$x - 1 + \frac{1}{x^2} = 0, \;\; \frac{1}{x^2} = 1 - x$

Sehingga:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = (1 - a) + (1 - b) + (1 - c) = 3 - (a + b + c) = 3 - 1 = 2.$$

Contoh 4:

Misalkan a, b, c adalah akar-akar dari $x^3 - x^2 + 2 = 0$. Tentukan nilai dari

$a^2 + b^2 + c^2, \;\; a^3 + b^3 + c^3, a^4 + b^4 + c^4$

Pembahasan:

Berdasarkan teorema vieta, kita peroleh:

$a + b + c = 1, ab + ac + bc = 0, abc = -2$

- $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc) = 1^2 - 2(0) = 1$
- Alternatif 1

  $a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 - 3(a + b + c)(ab + ac + bc) + 3abc$

$$= 1^3 - 3(1)(0) + 3(-2) = 1 - 6 = -5$$

Alternatif 2

Dari persamaan $x^3 - x^2 + 2 = 0$, kita peroleh $x^3 = x^2 - 2$

$a^3 + b^3 + c^3 = (a^2 - 2) + (b^2 - 2) + (c^2 - 2) = a^2 + b^2 + c^2 - 6 = 1 - 6 = -5$

- Dari $x^3 = x^2 - 2$ maka $x^4 = x^3 - 2x$

  $a^4 + b^4 + c^4 = (a^3 - 2a) + (b^3 - 2b) + (c^3 - 2c) = a^3 + b^3 + c^3 - 2(a + b + c)$

  $= -5 - 2(1) = -7$

LATIHAN SOAL 4.(3)

1. (HSMC-USC, 2000) Misalkan $a, b, \& c$ adalah tiga akar-akar dari $x^3 - 64x - 14$. Tentukan nilai dari $a^3 + b^3 + c^3$
2. Jika $x_1, x_2, \dots, x_{100}$ adalah akar-akar dari

   $$x^{100} - 10x + 10 = 0$$

   maka tentukan nilai dari

   $$\sum_{i=1}^{100} x_i^{100}$$
3. Misalkan a, b, c akar-akar dari $x^3 - x - 1 = 0$. Tentukan

   a) $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}$

   b) $a^5 + b^5 + c^5$
4. (HSMC-USC, 2006) Misalkan a bilangan real sehingga sukubanyak $P(x) = x^3 + (a-1)x^2 - ax + 1$ dan $Q(x) = x^2 + ax + 1$ mempunyai akar persekutuan. Tentukan nilai dari a.
5. (HSMC-USC, 2005) Misalkan a dan b bilangan real sedemikian sehingga $x^4 + 2x^3 - x^2 + ax + b = [Q(x)]^2$ untuk suatu sukubanyak $Q(x)$. Tentukan nilai dari $a + b$.
6. (HSMC-USC, 2002) Andaikan α adalah akar dari $x^4 + x^2 - 1$. Tentukan nilai dari $\alpha^6 + 2\alpha^4$.
7. (HSMC-USC, 2004) Tentukan banyaknya akar real berbeda dari sukubanyak

   $$x^{11} + x^{10} + x^9 + \cdots + x + 1$$
8. (HSMC-USC, 2003) Misalkan

   $$f(x) = (x-1) + (x-2)^2 + (x-3)^3 + \cdots + (x-9)^9 + (x-10)^{10}$$

   Tentukan jumlah semua akar-akar dari $f(x)$.
9. Misalkan p dan q adalah bilangan prima. Jika diketahui persamaan

$x^{2016} - px^{2015} + q = 0$ mempunyai akar-akar bilangan bulat maka nilai dari $p.q$

10. Sukubanyak $x^3 - ax^2 + bx - 2015 = 0$ memiliki tiga solusi bulat positif. Berapakah kemungkinan nilai terkecil dari a?
11. Jika p dan q adalah akar-akar sukubanyak derajat dua: $x^2 + x + 1 = 0$. Tentukan nilai dari $p^{2015} + q^{2015}$
12. Misalkan x_1, x_2, x_3 adalah akar-akar dari
$$(2015 - x)^3 + (2013 - x)^3 = (4028 - 2x)^3$$
Tentukan nilai dari $x_1 + x_2 + x_3$
13. Tentukan jumlah kubik dari akar-akar real persamaan
$$x^4 + 4 + 11x^2 = 8(x^3 + 2x)$$
14. Tentukan akar real terkecil dari persamaan sukubanyak
$$x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0$$
15. Akar-akar dari $x^3 + 2x^2 - 11x - 12 = 0$ adalah $-4, -1, \& \ 3$. Tentukan akar-akar dari $(x + 2015)^3 + 2(x + 2015)^2 - 11(x + 2015) - 12 = 0$
16. Sukubanyak $x^3 + px^2 + qx + r$ memiliki tiga akar real berbeda. Jika r bilangan prima, tentukan nilai dari q.
17. Jika a, b, c adalah solusi persamaan $x^3 - 5x^2 + 7x + 2015 = 0$. Tentukan nilai dari $a(b^2 + c^2) + b(a^2 + c^2) + c(a^2 + b^2)$
18. Diketahui bahwa $f(x) = x^{2015} + a_{2014}x^{2014} + a_{2013}x^{2013} + \cdots + a_1x + a_0$
Jika $f(i) = i + 1,\ i = 1, 2, \ldots, 2015$, maka tentukan nilai dari $f(2016)$.

5. Fungsi

a. Operasi Biner

> **Definisi**
> Suatu operasi biner pada suatu himpunan bilangan adalah suatu cara mengambil dua dari kumpulan bilangan-bilangan dan menghasilkan bilangan yang ketiga.

Pada umumnya, operasi biner dalam kompetisi-kompetisi matematika akan dinyatakan dengan menggunakan simbol-simbol yang tidak biasanya, seperti $\oplus$, σ, $atau\ \psi$. Hasil dari operasi setelah diterapkan pada bilangan a dan b biasanya di tulis sebagai $\oplus(a, b)\ atau\ a \oplus b$.

Contoh 1:

(OSK, 2002) Jika untuk setiap x, y bilangan real berlaku $x\$y = xy - x + y$, maka $(x + y)\ \$\ (x - y)$ sama dengan ....

A.	$x^2 - y^2 + 2x$	C.	$x^2 - y^2 + 2y$	E.	$x^2 - y^2$
B.	$x^2 - y^2 - 2x$	D.	$x^2 - y^2 - 2y$		

Pembahasan:

Perhatikan berdasarkan definisi:

$(x + y) \$ (x - y) = (x + y)(x - y) - (x + y) + (x - y)$

$= x^2 - y^2 - 2y \;\; (D)$

Contoh 2:

(OSP, 2002) Didefinisikan $a * b = a + b + ab$, untuk semua bilangan real a dan b. Jika $S = \{a \; bilangan \; real, \;\; a * (-a) > a\}$, tuliskan S sebagai sebuah selang(interval).

Pembahasan:

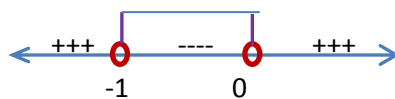
Perhatikan bahwa berdasrkan definisi:

$$a * (-a) > a$$

$$a + (-a) + a(-a) > a$$

$$-a^2 > a$$

$$a^2 + a < 0$$

$$a(a + 1) < 0$$

Jadi, $S = \{a | -1 < a < 0\}$

Contoh 3:

(AHSME, 1993) Didefinisikan operasi " ∞ " dengan $x \infty y = 4x - 3y + xy$ untuk semua bilangan real x dan y. Berapa banyak bilangan real y yang memenuhi $12 = 3 \infty y$?

Pembahasan:

Perhatikan bahwa:

$12 = 3 \infty y = 4.3 - 3.y + 3.y = 12$

Jadi, persamaan pada soal benar untuk sebarang bilangan real y.

Contoh 4:

(AMC, 2002/10A) Untuk bilangan real tidak nol a, b, dan c, didefinisikan $(a, b, c) = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$. Berapakah nilai dari $(2, 12, 9)$?

Pembahasan:

Perhatikan bahwa:

$$(2,12,9)=\frac{2}{12}+\frac{12}{9}+\frac{9}{2}=\frac{1}{6}+\frac{4}{3}+\frac{9}{2}=\frac{1+8+27}{6}=\frac{36}{6}=6$$

Contoh 5:

(OSK, 2006) Didefinisikan $a*b=a+b+1$ untuk semua bilangan bulat a dan b. Jika p memenuhi $a*p=a$, untuk setiap bilangan bulat a, maka p sama dengan ...

Pembahasan:

Perhatikan bahwa

$a*p=a$

$a+p+1=a, \qquad p=1$

LATIHAN SOAL 5.a

1. (AMC, 2002/10B) Untuk bilangan real tidak nol a, b, dan c, didefinisikan
$$(a,b,c)=\frac{abc}{a+b+c}$$
Berapakah nilai dari (2, 4, 6)?
2. (AMC, 2003/10B) Misalkan $@(x)$ menyatakan jumlah dari digit-digit dari bilangan bulat positif x. Sebagai contoh, $@(8)=8$ dan $@(123)=1+2+3=6$. Berapa banyak bilangan x dua digit sehingga $@(@(x))=3$?
3. (AMC, 2004/10A) Untuk sebarang tiga bilangan real a, b, dan c dengan $b\neq c$, Operasi $\nexists$ didefinisikan $\nexists(a,b,c)=\frac{a}{b-c}$?
Berapakah nilai $\nexists\left(\nexists(1,\ 2,\ 3),\ \nexists(2,3,1),\nexists(3,1,2)\right)$?
4. Untuk tiap pasangan bilangan real $a\neq b$, didefinisikan operasi * sebagai
$$a*b=\frac{a+b}{a-b}.$$
Berapakah nilai dari $(2015\ *2014)\ *4028$?
5. (HSMC-USC, 2007) Dalam planet Pluto, penghuninya menggunakan operator matematika yang sama di bumi seperti $(+,-,:,dll)$ dan mereka juga menggunakan operator "@" . Para saintis menentukan kebenaran operator tersebut untuk bilangan real x dan y:
$$x@0=x$$
$$x@y=y@x$$
$$(x+1)@y=(x@y)+y+1$$
Tentukan nilai dari $12@5$.
6. (NC-SMC, 2011) Jika $x\#y$ didefinisikan untuk semua bilangan bulat sebagai berikut

$$x\#y=\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$$

dan jika $x\#y$ sama dengan 7, berapakah kemungkinan nilai untuk $x>14$?

7. (NC-SMC, 2011) Untuk semua bilangan $x\ \&\ y,$ operasi $x\blacksquare y$ didefinisikan sebagai $x\blacksquare y=ax+by+c.$ Jika $2\blacksquare 3=3, 7\blacksquare 4=17,\ \&\ 4\blacksquare 10=2$ Maka tentukan nilai y yang memenuhi $3\blacksquare y=0$
8. (NC-SMC, 2010) Suatu operasi " $\otimes$ " didefinisikan untuk semua bilangan rasional positif sebagai

$$a\otimes b=\frac{2ab}{a+b}$$

Tentukan semua nilai x yang memenuhi $(x\otimes 2)\oplus x=1$
9. (NC-SMC, 2008) Misalkan $a*b$ didefinisikan sebagai

$$a*b=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

Tentukan himpunan solusi untuk $x*(x*1)=2.$
10. (NC-SMC, 2008) Misalkan $n\downarrow$ menyatakan bilangan prima terbesar yang kurang dari n dan $n\uparrow$ menyatakan bilangan prima terkecil yang lebih dari n. Tentukan nilai dari $[(10+20\uparrow)\downarrow+30]\uparrow$

b. Persamaan Fungsi

Persamaan fungsi adalah persamaan untuk fungsi yang belum diketahui (*unknown functions)* sebagai ganti bilangan-bilangan yang belum diketahui. Dalam bagian ini, kita akan mencoba mengeksplorasi bagaimana kita dapat menemukan “the unknown function” ketika kondisi-kondisi tertentu sudah diketahui. Persamaan fungsi ini biasanya memiliki banyak selesaian, dan kadang kita sulit untuk mencari semua solusinya. Persamaan fungsi dalam buku ini akan dibahs dalam dua bagian, yakni *Persamaan fungsi satu variabel* & *Persamaan fungsi lebih dari satu variabel*.

i. Persamaan Fungsi Satu Variabel

Contoh 1:

(OSK, SMP/2013) Jika f adalah fungsi linier, $f(1)=2000,$ dan $f(x+1)+12=f(x),$ maka nilai $f(100)=\cdots$

Pembahasan:

Perhatikan bahwa

$f(x+1)-f(x)=-12$

Dari bentuk di atas maka

$f(2)-f(1)=-12, f(2)=-12+f(1)$

$f(3)-f(2)=-12, f(3)=-12+f(2)=-12+\big(-12+f(1)\big)=2.(-12)+f(1)$

$f(4)-f(3)=-12, f(4)=-12+f(3)=3.(-12)+f(1)$

Jika proses itu diteruskan maka,

$f(100) = 99.(-12) + f(1) = -1188 + 2000 = 812$

Contoh 2:

(OSK, Tipe 3/2011) Misalkan f suatu fungsi yang memenuhi $f(xy) = \frac{f(x)}{y}$ untuk semua bilangan real positif x dan y. Jika $f(100) = 3$ maka $f(10)$ adalah ...

Pembahasan:

Perhatikan bahwa

$f(10.10) = \frac{f(10)}{10},\ f(100) = \frac{f(10)}{10},\ f(10) = 10.3 = 30$

Contoh 3:

(AMC12B, 2007) Suatu fungsi f memiliki sifat $f(3x-1) = x^2 + x + 1$ untuk semua bilangan real x. Berapa $f(5)$?

Pembahasan:

Perhatikan bahwa

$3x - 1 = 5,\ 3x = 6,\ x = 2$

Sehingga

$f(5) = 2^2 + 2 + 1 = 7.$

Contoh 4:

(AHSME, 1998) Misalkan fungsi $f(x)$ memenuhi sifat bahwa untuk sebarang dua bilangan $x, y,\ f(x+y) = x + f(y)$. Jika $f(0) = 2$, maka tentukan nilai dari $f(1998)$.

Pembahasan:

Perhatikan bahwa

Jika $x = 1998,\ y = 0$ maka

$f(1998 + 0) = 1998 + f(0),\ f(1998) = 1998 + 2 = 2000$

Contoh 5:

(OSK, 2003) Misalkan f suatu fungsi yang memenuhi

$$f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}f(-x) = 2x$$

untuk setiap bilangan real $x \neq 0$. Berapakah nilai dari $f(2)$?

Pembahasan:

Substitusikan berturut-turut, $x = \frac{1}{2}$ & $x = -2$ maka kita peroleh

$f(2) + 2f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$ & $f\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}f(2) = -4$

Dengan eliminasi, maka

$2f(2) = 9,\ \ f(2) = 9/2$

LATIHAN SOAL 5.b.(i)

1. Jika $f(x)$ adalah fungsi kuadrat sedemikian sehingga

$$f(x+1) - f(x) = 8x + 3$$

dan $f(0) = 5$, tentukan nilai dari $f(2015)$

2. (AHSME, 1998) Misalkan $f(x)$ adalah fungsi yang memenuhi: (i) untuk setiap bilangan real x dan y maka $f(x+y)=x+f(y)$ dan (ii) $f(0)=2$. Nilai dari $f(1998)$ adalah ....
3. Untuk semua bilangan bulat x, fungsi $f(x)$ memenuhi
$$f(x+1)-f(x+1)f(x)=1+f(x)$$
Jika $f(1)=2$, maka tentukan nilai dari $f(2015)$
4. (AMC-12A, 2009) Andaikan $f(x+3)=3x^2+7x+4$ dan $f(x)=ax^2+bx+c$. Berapakah nilai dari $a+b+c$?
5. (HSMC-USC, 2006) Andaikan $f(x)$ adalah fungsi sedemikian sehingga
$$3f(x)+2f(1-x)=2x+9$$
untuk setiap bilangan real x. Berapakah nilai dari $f(2)$?
6. Jika $f(x)$ adalah fungsi yang tidak terdefinisi untuk x = 0 dengan
$f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x$. Tentukan $f(x)$.
7. (AMC-12, 2000) Misal f suatu fungsi sehingga $f\left(\frac{x}{3}\right)=x^2+x+1$.
Tentukan jumlah semua nilai z sehingga $f(3z)=7$.
8. (HSMC-USC, 2005) Misalkan $f(x)$ adalah fungsi, untuk setiap bilangan real x,
$$f(x)+2f(-x)=\sin x$$
Berapakah nilai dari $f(\pi/2)$?
9. (HSMC-USC, 2003) Fungsi bernilai real f didefinisikan untuk bilangan real tak nol sebagai
$$f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}f(-x)=2x$$
Berapakah nilai dari $f(2)$?
10. (HSMC, USC 2002) Misalkan $f(x)$ merupakan fungsi dimana $2\in D_f$ & $2\in R_f$. Andaikan $f[f(x)].[1+f(x)]=-f(x)$ untuk semua bilangan $x\in D_f$. Berapakah nilai dari $f(2)$?

ii. Persamaan Fungsi Lebih dari Satu Variabel

Untuk persamaan fungsi lebih dari satu variabel, kita dapat juga menerapkan metode-metode yang telah dijelaskan pada bagian sebelumnya. Di samping itu juga kita dapat mencoba mensubtitusikan beberapa bilangan spesial, misalkan $x=0,1,-1$ ke dalam kondisi yang diketahui. Untuk hal ini tidak

ada cara/metode yang tetap dalam menyelesaikannya. Untuk lebih jelasnya perhatikan contoh-contoh berikut:

Contoh 1:
Berikut ini contoh-contoh dari persamaan fungsi dalam dua variabel yang terkenal. Fungsi ini lebih dikenal dari "*Cauchy's functional equations*"

1. $f(x+y) = f(x) + f(y)$
2. $f(x+y) = f(x)f(y)$
3. $f(xy) = f(x) + f(y)$
4. $f(xy) = f(x)f(y)$

Contoh 2:
Jika $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ memenuhi

1. $f(1) = 2,$
2. Untuk semua $x, y \in \mathbb{Q}, f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1,$

Tentukan $f(x)$.

Pembahasan:
Subtitusikan $y = 1$ maka

$$f(x) = f(x)f(1) - f(x+1) + 1$$
$$= 2f(x) - f(x+1) + 1$$
$$f(x+1) = f(x) + 1$$

Dengan menerapkan kondisi 1 dan dengan induksi matematika, untuk semua bilangan bulat x, kita mempunyai

$$f(x) = x + 1$$

Untuk sebarang bilangan rasional, misalkan $x = \frac{m}{n}$ dimana m, n bilangan bulat dan $n \neq 0$.

Substitusikan $x = \frac{m}{n}, y = n$ maka

$$f(m) = f\left(\frac{m}{n}\right)(n+1) - f\left(\frac{m}{n} + n\right) + 1$$

Karena $f(x+1) = f(x) + 1, \forall x \in \mathbb{Q}$ maka

$$f\left(\frac{m}{n} + n\right) = f\left(\frac{m}{n}\right) + n$$

Subtitusikan ini ke persamaan semula, kita mempunyai

$$m + 1 = f\left(\frac{m}{n}\right)(n+1) - f\left(\frac{m}{n}\right) - n + 1$$

Sehingga, $f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n} + 1$

Jadi, $f(x) = x + 1, \ \forall x \in \mathbb{Q}$

Contoh 3:
Jika $(x-y)f(x+y) - (x+y)f(x-y) = 4xy\,(x^2 - y^2)$ untuk semua x, y.
Tentukan $f(x)$

Pembahasan:

Kondisi yang diketahui ekuivalen dengan

$$\frac{f(x+y)}{x+y} - \frac{f(x-y)}{x-y} = 4xy = (x+y)^2 - (x-y)^2$$

$$\frac{f(x+y)}{x+y} - (x+y)^2 = \frac{f(x-y)}{x-y} - (x-y)^2 \text{ untuk semua } x, y$$

Jadi, $\frac{f(x)}{x} - x$ konstant.

Misalkan $\frac{f(x)}{x} - x = k$ maka

$f(x) = x^3 + kx$

Contoh 4:

Jika f fungsi kontinu sedemikian sehingga $f(x+y) = f(x) + f(y)$ untuk $x, y \in \mathbb{R}$ maka buktikan bahwa $f(x) = cx$ dimana c suatu konstanta.

Pembahasan:

Perhatikan bahwa $f(x+y) = f(x) + f(y) \ldots\ldots\ldots.(1)$

Subtitusikan $y = 0$ ke (1), maka $f(x) = f(x) + f(0)$

$$f(0) = 0. \qquad (2)$$

Sekarang jika $y = -x$, maka $0 = f(x) + f(-x)$ atau

$$f(-x) = -f(x). \qquad (3)$$

Sekarang untuk $x > 0$

Subtitusikan $y = x$, kita peroleh $f(2x) = 2f(x)$, dan dengan induksi matematika

$$f(nx) = nf(x) \text{ untuk semua } n \in \mathbb{N} \qquad (4)$$

Untuk bilangan rasional, $x = \frac{m}{n}$, yaitu $n.x = m.1$ dengan (4) kita memperoleh $nf(x) = mf(1)$ dan

$$f(x) = \frac{m}{n} f(1). \qquad (5)$$

Jika $f(1) = c$ maka dari (2), (3), (5), kita peroleh $f(x) = cx$ untuk bilangan rasional x.

Misalkan x irasional

Kita pilih barisan rasional x_n dengan limit x

Karena f kontinu, maka

$$f(x) = \lim_{x_n \to x} f(x_n) = \lim_{x_n \to x} c\, x_n = cx$$

Maka kita mempunyai $f(x) = cx$ untuk semua nilai x bilangan real.

Contoh 5:

Sebagai akibat dari contoh 4, maka diperoleh beberapa sifat berikut:

Jika f fungsi kontinu dan untuk semua $x, y \in \mathbb{R}$ dan

a. $f(x+y)=f(x)f(y)$ maka $f(x)=c^x$
b. $f(xy)=f(x)+f(y)$ maka $f(x)=c\ln x$
c. $f(xy)=f(x)f(y)$ maka $f(x)=x^c$
dimana c suatu konstanta

LATIHAN SOAL 5.b.(ii)

1. Tentukan semua solusi kontinu dari persamaan fungsi:
$$f(x+y)=g(x)+h(y)$$
2. Tentukan fungsi f yang didefinisikan untuk $x>0$ sehingga
$$f(xy)=xf(y)+yf(x)$$
3. Tentukan semua fungsi yang memenuhi
$$f(x+y)+f(x-y)=2(f(x)+f(y))$$
4. Tentukan semua fungsi yang memenuhi
$$f(x+y)-f(x-y)=2f(y)$$
5. Tentukan semua fungsi yang memenuhi
$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)$$
6. Tentukan semua fungsi yang memenuhi
$$f(x+y)=\frac{f(x)f(y)}{f(x)+f(y)}$$
7. Tentukan semua fungsi kontinu f yang memenuhi
$$f(x+y)=f(x)+f(y)+f(x)f(y)$$
8. (VMO, 1985) Misalkan M merupakan suatu himpunan fungsi yang terdefinisi pada bilangan bulat dengan nilai real yang memenuhi dua kondisi:
   1) $f(x)f(y)=f(x+y)+f(x-y), \forall x,y \in \mathbb{Z}$
   2) $f(0)\neq 0$

   Tentukan semua $f\in M$ sedemikian sehingga $f(1)=5/2$
9. (VMO, 1991) Tentukan semua fungsi real $f(x)$ yang memenuhi
$$\frac{1}{2}f(xy)+\frac{1}{2}f(xz)-f(x)\,f(yz)\geq\frac{1}{4},$$
   untuk semua bilangan real x,y,z.
10. (VMO, 1992B) Andaikan fungsi bernilai real, $f(x)$ pada bilangan real sedemikian sehingga
$$f(x+2xy)=f(x)+2f(xy)$$
   untuk semua bilangan real x,y & $f(1991)=a$ dimana a bilangan real. Hitunglah nilai dari $f(1992)$

11. (VMO, 2000B) Tentukan semua fungsi bernilai real $f(x)$ yang terdefnisi pada bilangan real sedemikian sehingga

$$x^2 f(x) + f(1-x) = 2x - x^4$$

untuk semua bilangan real x

6. Persamaan dan Sistem Persamaan

a. Persamaan Lingkaran

Definisi:
Lingkaran adalah tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama terhadap sebuah titik tertentu

Dari definisi di atas, yang dimaksud dengan titik tetap adalah ***pusat lingkaran***, dan jaraknya disebut ***jari-jari lingkaran***. Ruas garis yang panjangnya 2r dan melalui titik pusat disebut diameter lingkaran.

Ada dua hal penting untuk menemukan persamaan lingkaran (dalam aljabar), yakni harus ada pusat dan jari-jari lingkaran.

Persamaan lingkaran yang berpusat (h,k) dan jari-jari r:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Persamaan lingkaran yang berpusat (0,0) dan jari-jari r:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Persamaan lingkaran dalam bentuk standart:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

- Pusat $\left(-\frac{1}{2}A,\ -\frac{1}{2}B\right)$
- Jari-jari = $\sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}$

Persamaan lingkaran yang berpusat (h,k) dan menyinggung sumbu X:

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ dimana $r = |k|$

Persamaan lingkaran yang berpusat (h,k) dan menyinggung sumbu Y:

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ dimana $r = |h|$

Persamaan lingkaran yang berpusat (h,k) dan menyinggung sumbu X dan Y:

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ dimana $r=|h|=|k|$, atau dengan kata lain bahwa $h=k$

Dua rumus yang sering digunakan dalam mencari persamaan lingkaran:

- Jarak diantara dua titik dan Titik tengah. Konsep ini digunakan jika diketahui titik-titik ujung diameter lingkaran.
  Diketahui titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$, maka:

  Jarak $AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

  Titik tengah antara A dan B = $\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2), \frac{1}{2}(y_1+y_2)\right)$

- Jarak titik ke garis lurus. Konsep ini digunakan jika diketahui pusat lingkaran dan garis singgung lingkaran.
  Diketahui titik $A(x_1, y_1)$ dan garis $g \equiv ax+by+c=0$, maka jarak titik A ke garis g adalah

$$d=\left|\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$$

Contoh 1:
Tentukan persamaan lingkaran yang pusatnya O(0,0) dan
(a). berjari-jari 4 (b) melalui titik P(3, -5)
Pembahasan:

a. Lingkaran dengan pusat O(0,0) dan berjari-jari 4 mempunyai persamaan
$x^2+y^2=16$

b. Pusat lingkaran O(0,0). Karena lingkaran melalui P, maka jari-jari lingkaran adalah jarak titik O ke titik P. Jarak $OP=\sqrt{(3-0)^2+(-5-0)^2}=\sqrt{34}$. Jadi persamaan lingkaran yang diminta adalah
$x^2+y^2=34.$

Contoh 2:
Tentukan persamaan lingkaran yang pusatnya $P(-3, 5)$dan
(a). berjari-jari 5 (b) melalui titik (2, 3) (c) menyinggung sumbu-y
Pembahasan:

a. Persamaan lingkaran dengan pusat $P(-3,5)$ dan berjari-jari 5 adalah
$(x-(-3))^2+(y-5)^2=5^2$

$\Leftrightarrow (x+3)^2+(y-5)^2=25$

b. Lingkaran dengan pusat P(-3,5) dan melalui titik (2,3) mempunyai jari-jari $\sqrt{(2-(-3))^2+(3-5)^2}=\sqrt{29}$

Persamaan lingkaran itu:

$(x+3)^2+(y-5)^2=29$

c. Lingkaran dengan pusat P(-3,5) dan menyinggung sumbu-y, jari-jarinya adalah jarak P(-3,5) dengan sumbu-y, yaitu $|-3|=3$. Jadi persamaannya adalah $(x+3)^2+(y-5)^2=9$.

Contoh 3:

Tentukan koordinat pusat dan panjang jari-jari lingkaran apabila diketahui persamaan:

a. $x^2+y^2-2x-6y-15=0$

b. $2x^2+2y^2-4x+3y=0$

Pembahasan:

a. Dari $x^2+y^2-2x-6y-15=0$, maka kita peroleh: $A=-2, B=-6, C=-15$

$-\frac{1}{2}A=1$ dan $-\frac{1}{2}B=3$, Sehingga $P(1,\ 3)$

Jari-jari = $\sqrt{1+9+15}=5$

b. Dari $2x^2+2y^2-4x+3y=0$, maka kita bagi kedua ruas dengan 2:

$x^2+y^2-2x+\frac{3}{2}y=0$. Sehingga kita peroleh $A=-2, B=\frac{3}{2}, C=0$

$-\frac{1}{2}A=1$ & $-\frac{1}{2}B=-\frac{3}{4}$, Maka $P\left(1,\ -\frac{3}{4}\right)$

Jari-jari = $\sqrt{1+\frac{9}{16}}=\frac{5}{4}$

Kedudukan Titik terhadap Lingkaran

Misalkan suatu lingkaran pusat (h,k) dan jari-jari r, yakni $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ dan sebuah titik $A(x_1,y_1)$, Maka titik A akan mempunyai tiga kemungkinan kedudukan terhadap lingkaran:

- ✓ Jika $(x_1-h)^2+(y_1-k)^2>r^2$, maka A terletak di luar lingkaran
- ✓ Jika $(x_1-h)^2+(y_1-k)^2=r^2$, maka A terletak pada lingkaran
- ✓ Jika $(x_1-h)^2+(y_1-k)^2<r^2$, maka A terletak di dalam lingkaran

Kedudukan Garis terhadap Lingkaran

Misalkan diketahui suatu garis $g : y = mx + c$ dan lingkaran $L : (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$, Maka untuk menentukan kedudukan garis g terhadap lingkaran L ikuti langkah-langkah berikut:

- ✓ Substitusikan persamaan garis g ke persamaan lingkaran L, sehingga diperoleh persamaan kuadrat dalam variabel x, yakni $ax^2 + bx + c = 0$
- ✓ Tentukan nilai a, b, dan c, kemudian hitunglah nilai diskriminannya $(D = b^2 - 4ac)$
- ✓ Bandingkan nilai D hasil perhitungan dengan nol.
  - Jika $D > 0$, maka garis g memotong di dua titik pada lingkaran L
  - Jika $D = 0$, maka garis g memotong di satu titik pada lingkaran L/menyinggung
  - Jika $D < 0$, maka garis g tidak memotong lingkaran L

Contoh 4:

Diketahui garis $y = mx$ dan lingkaran $x^2 + y^2 = 10x - 16$. Tentukan nilai m sehingga garis tersebut bersinggungan dengan lingkaran.

Pembahasan:

Substitusikan persamaan garis ke dalam persamaan lingkaran, kita peroleh bentuk persamaan kuadrat dalam x:

$$(1+m^2)x^2 - 10x + 16 = 0.$$

Diskriminan, $D = 100 - 64(1+m^2) = 36 - 64m^2 = 4(3-4m)(3+4m)$

Agar garis bersinggungan dengan lingkaran maka haruslah D = 0, yakni ketika $m = -3/4$ atau $m = 3/4$

Contoh 5:

Tentukan kedudukan titik A(-6, 8) terhadap lingkaran:

a. $x^2 + y^2 = 100$

b. $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 25 = 0$

c. $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 64$

Pembahasan:

a. A(-6,8) disubstitusikan ke persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = 100$ maka diperoleh:

$(-6)^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$.

Jadi, titik A terletak pada lingkaran.

b. A(-6,8) disubstitusikan ke persamaan lingkaran $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 25 = 0$ maka diperoleh:

$(-6)^2 + 8^2 + 6(-6) - 8.8 + 25 = 36 + 64 - 36 - 64 + 25 = 25 > 0$.

Jadi, titik A terletak di luar lingkaran.

c. A(-6,8) disubstitusikan ke persamaan lingkaran $(x+1)^2+(y-2)^2=64$ maka diperoleh:

$(-6+1)^2+(8-2)^2=25+36=61<64$.

Jadi, titik A terletak di dalam lingkaran.

Contoh 6:

Tentukan kedudukan garis $g: y=x+1$ terhadap lingkaran $L: x^2+y^2=25$.

Pembahasan:

Substitusikan persamaan garis g ke persamaan lingkaran L, maka kita peroleh:

$x^2+(x+1)^2=25$

$\Leftrightarrow 2x^2+2x-24=0$

$\Leftrightarrow x^2+x-12=0$

$D=49>0$

Jadi, garis g memotong lingkaran di dua titik.

Persamaan Garis Singgung Lingkaran

- ✓ Persamaan Garis Singgung melalui titik pada lingkaran

Jika titik $A(x_1, y_1)$ terletak pada lingkaran $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$, maka persamaan garis singgung yang melalui titik A adalah

$$(x_1-h)(x-h)+(y_1-k)(y-k)=r^2$$

Jika titik $A(x_1, y_1)$ terletak pada lingkaran $x^2+y^2=r^2$, maka persamaan garis singgung yang melalui titik A adalah

$$x_1x+y_1y=r^2$$

Jika titik $A(x_1, y_1)$ terletak pada lingkaran $x^2+y^2+Ax+By+C=0$, maka persamaan garis singgung yang melalui titik A adalah

$$x_1x+y_1y+\left(\frac{1}{2}Ax_1+\frac{1}{2}Ax\right)+\left(\frac{1}{2}By_1+\frac{1}{2}By\right)+C=0$$

✓ Persamaan Garis Singgung yang Bergradien tertentu

Jika persamaan lingkaran $L:(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$, maka persamaan garis singgung lingkaran L yang bergradien m adalah

$$y-k=m(x-h)\pm r\sqrt{m^2+1}$$

Jika persamaan lingkaran $L:x^2+y^2=r^2$, maka persamaan garis singgung lingkaran L yang bergradien m adalah

$$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$$

Jika persamaan lingkaran $L:x^2+y^2+Ax+By+C=0$, maka persamaan garis singgung lingkaran L yang bergradien m adalah

- ✓ Cari dahulu Pusat(h,k) dan jari-jari(r), Kemudian gunakan rumus di bawah ini:
- ✓ $y-k=m(x-h)\pm r\sqrt{m^2+1}$

Contoh 7:

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ melalui titik $A(4,-3)$

Pembahasan:

- Check kedudukan titik A terhadap lingkaran L

  $4^2+(-3)^2=25$

  Jadi, titik A terletak pada lingkaran
- Karena A terletak pada lingkaran L, maka persamaan garis singgung lingkaran L yang memalui A adalah:

  $x_1x+y_1y=25$

  $\Leftrightarrow\ 4x-3y=25$

Contoh 8:

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $x^2+y^2-4x-6y-3=0$ yang sejajar garis $3x-4y=2$

Pembahasan:

Misalkan persamaan garis singgung = g dan garis $3x-4y=2$ adalah k, maka

$m_g = m_k = \frac{3}{4}$.

Dari $x^2+y^2-4x-6y-3=0$, maka kita peroleh

$P(2,3)$ dan $r=\sqrt{4+9+3}=4$

Sehingga, persamaan garis singgungnya:

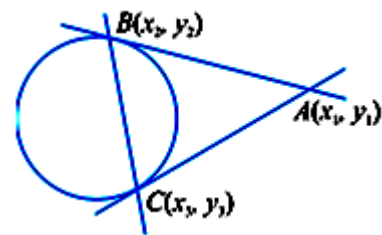
$$g \equiv y-3=\frac{3}{4}(x-2)\pm 4\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2+1}$$

$$4y-12=3x-6\pm 16\frac{5}{4}$$

$$4y=3x+6\pm 20$$

✓ Persamaan Garis Singgung melalui titik di luar lingkaran

Jika melalui titik $A(x_1,y_1)$ di luar lingkaran $L: x^2+y^2=r^2$ dibuat dua buah garis singgung pada lingkaran dengan titik singgungnya $B(x_2,y_2)\,\&\,C(x_3,y_3)$, maka persamaan garis yang melalui B dan C

adalah $x_1x+y_1y=r^2$ disebut ***garis polar (gp)*** pada lingkaran L dan titik $A(x_1,y_1)$ disebut ***titik polar (tp)***.

Untuk mencari persamaan garis singgung yang melalui titik di luar lingkaran dapat ditentukan dengan langkah-langkah berikut:

- Mencari garis polar dari titik A terhadap lingkaran L
- Mencari titik potong gp dan lingkaran L
- Membuat persamaan garis singgung yang melalui titik potong tersebut.

LATIHAN 6A.I

1. Tentukan persamaan lingkaran dengan pusat O dan melalui titik (7,-2)
2. Tentukan pusat dan jari-jari dari persamaan lingkaran (i) $4x^2+4y^2=25$

   (ii) $x^2+y^2=18$
3. Tentukan persamaan lingkaran yang mempunyai pusat sama (kosentrik) dengan lingkaran $x^2+y^2=9$ tetapi jari-jarinya tiga kali lebih panjang.

4. Tentukan m agar titik (m, -2) terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 = 13$
5. Misalkan titik A(1,0) dan B(9,0). Tentukan tempat kedudukan dari semua titik P(x,y) sehingga PB=3 PA.

LATIHAN 6A.II

1. (AMC, 12A/2002/18) Misalkan C_1 & C_2 lingkaran dengan persamaan berturut-turut $(x-10)^2 + y^2 = 36$ dan $(x+15)^2 + y^2 = 81$. Berapa panjang dari ruas garis terpendek $\overline{PQ}$ yang menyinggung lingkaran C_1 di P dan lingkaran C_2 di Q?
2. (OSK, 2011/Tipe 1) Luas daerah di dalam lingkaran $x^2 + y^2 = 21^2$ tetapi di luar lingkaran $x^2 + (y-7)^2 = 14^2$ dan $x^2 + (y+7)^2 = 14^2$ adalah ...
3. (AHSME, 1996/25/AMC8) Diketahui bahwa $x^2 + y^2 = 14x + 6y + 6$, berapa kemungkinan nilai terbesar dari $3x + 4y$?
4. (AHSME, 1996/20/AMC8) Dalam bidang koordinat xy, berapa rute terpendek dari titik (0,0) ke (12,6) yang tidak melewati daerah di dalam lingkaran $(x-6)^2 + (y-8)^2 = 25$?
5. (AHSME, 1978/10/Book IV) Jika r bilangan positif dan garis yang persamaannya $x + y = r$ adalah garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = r$, maka r sama dengan ....
6. (AHSME, 1965/13/Book II) Misalkan n adalah banyaknya pasangan bilangan (x,y) yang memenuhi persamaan $5y - 3x = 15$ dan $x^2 + y^2 \le 16$. Maka n sama dengan ....
7. (NYCIML, Fall 1975/3) Tentukan semua pasangan bilangan bulat (x,y) yang memenuhi $x^2 + y^2 \le 25$ dan $y = x - 3$.
8. (NYCIML, Spring 1980/15) Ada dua lingkaran yang mempunyai pusat pada sumbu X, melalui titik asal (0,0), dan menyinggung lingkaran $(x-7)^2 + (y-6)^2 = 25$. Tentukan jari-jari dari lingkaran yang terkecil dari keduanya.
9. (NYCIML, Fall 1981/12) Luas daerah persekutuan lingkaran $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 25$ dan $(x-2)^2 + (y-6)^2 = 25$ dibagi menjadi dua bagian yang sama oleh garis $14x + 3y = k$. Tentukan nilai k.

b. Persamaan Kuadrat (PK)

Bentuk Umum PK

Persamaan kuadrat dalam variabel x, dapat ditulis dalam bentuk umum:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

dengan $a, b, c \in \mathbb{R}$ & $a \neq 0$ dimana a merupakan koefisien x^2, b merupakan koefisien x, dan c konstanta.

Cara Menyelesaikan PK

Untuk menyelesaikan persamaan kuadrat dengan bentuk $ax^2 + bx + c = 0$ dapat dengan cara mengganti variabel x dengan suatu bilangan real sehingga kalimat terbuka tersebut bernilai benar. Nilai pengganti x yang memenuhi PK $ax^2 + bx + c = 0$ disebut *penyelesaian atau akar dari PK.*

Untuk mencari akar-akar dari suatu PK ada beberapa cara. Dan kalian semua telah mempelajarinya pada saat SMP. Cara tersebut diantaranya:

- *Memfaktorkan*
- *Melengkapkan kuadrat sempurna*
- *Menggunakan rumus kuadrat* $\left(x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$
- *Menggambarkan sketsa grafik fungsi* $f : ax^2 + bx + c = 0$

Contoh:

(OSK 2002) Misalkan a dan b bilangan real yang berbeda sehingga $\frac{a}{b} + \frac{a+10b}{b+10a} = 2$.

Tentukan nilai $\frac{a}{b}$.

Pembahasan:

$\frac{a}{b} + \frac{a+10b}{b+10a} = 2 \;\rightarrow\; \frac{a}{b} + \frac{\frac{a}{b}+10}{1+10\frac{a}{b}} = 2$

Misalkan $x = \frac{a}{b}$, maka $\frac{x+10}{1+10x} = 2 - x \;\rightarrow x + 10 = 2 - 10x^2 + 19x$

$5x^2 - 9x - 4 = 0 \;\rightarrow\; (5x-4)(x-1) = 0 \;\rightarrow\; x = 1$ atau $x = \frac{4}{5}$

Karena a tidak sama dnegan b maka jelas $x \neq 1$ maka $\frac{a}{b} = \frac{4}{5}$

Untuk lebih jelasnya silahkan direview kembali materi yang ada dibuku SMP Kalian.

Hubungan Jenis-Jenis Akar PK dengan nilai Diskriminan

Sebelum kita mengulas tentang hubungan jenis-jenis akar dari PK, kita kenalkan dahulu arti dari Diskriminan PK.

Diskriminan dari suatu PK merupakan suatu yang membedakan jenis akar suatu PK. Dan disimbolkan dengan D. Adapun rumus untuk diskriminan PK adalah:

$$D = b^2 - 4ac$$

Berikut ini hubungan jenis-jenis akar Pk dengan nilai D:

- ✓ Jika D>0, maka PK mempunyai *dua akar real yang berlainan.*
  - Jika D berbentuk kuadrat sempurna maka kedua akarnya itu rasional
  - Jika D tidak berbentuk kuadrat sempurna maka kedua akarnya itu irasional
- ✓ Jika D = 0, maka PK mempunyai *dua akar yang sama (akarnya kembar), real, dan rasional.*
- ✓ Jika D < 0, maka PK *tidak mempunyai akar real atau kedua akarnya tidak real.*

Rumus Jumlah & Hasil Kali Akar-Akar PK

Jika x_1 & x_2 adalah akar-akar PK $ax^2 + bx + c = 0$, dengan $a \neq 0$, jumlah dan hasil kali akar-akar PK itu adalah

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{dan} \quad x_1 \,.\, x_2 = \frac{c}{a}$$

Dari rumus di atas, maka kita peroleh identitas-identitas berikut:

- ✓ $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$
- ✓ $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2)$
- ✓ $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}$
- ✓ $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2$

- ✓ $\frac{1}{x_1^2+x_2^2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}$
- ✓ $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}$

Silahkan kalian buktikan kebenaran semua identitas di atas.

Jika x_1 & x_2 adalah akar-akar PK $ax^2+bx+c=0$, dengan $a\neq 0$:

- ✓ Akar-akarnya berlawanan: $(x_1=-x_2)\Leftrightarrow b=0$
- ✓ Akar-akarnya berkebalikan: $\left(x_1=\frac{1}{x_2}\right)\Leftrightarrow a=c$
- ✓ Sebuah akarnya sama dengan nol: $(x_1=0)\Leftrightarrow c=0\ \&\ x_2=-\frac{b}{a}$
- ✓ Kedua akarnya sama besar: $(x_1=x_2)\Rightarrow x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$

Contoh:

(OSP 2010) Persamaan kuadrat $x^2-px-2p=0$ mempunyai dua akar real α & β. Jika $\alpha^3+\beta^3=16$, maka hasil tambah semua nilai p yang memenuhi adalah ....

Pembahasan:

$x^2-px-2p=0$ akar-akarnya α & β

Syarat akar-akar real adalah

$p^2-4(1)(-2p)\geq 0$

$p(p+8p)\geq 0$

Maka syarat agar α & β real adalah $p\leq -8\ \ v\ \ p\geq 0$

Perhatikan bahwa $\alpha^3+\beta^3=16$

$(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=16$

$p^3-3(-2p)(p)=16$

$p^3+6p^2-16=0$

$(p+2)(p^2+4p-8)=0$

$p=-2$ tidak memenuhi syarat $p\leq -8\ \ v\ \ p\geq 0$

Jika $p^2+4p-8=0$ maka

$$p_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4(1)(-8)}}{2(1)}=-2\pm 2\sqrt{3}$$

Yang memenuhi syarat hanya $p=-2+2\sqrt{3}$

Jadi, jumlah semua nilai p yang memenuhi sama dengan $-2+2\sqrt{3}$.

Menyusun PK

- ✓ Menyusun PK yang diketahui akar-akarnya

  Untuk menyusun PK jika diketahui akar-akarnya, ada dua metode:

  - *Metode Faktor*

    $(x-x_1)(x-x_2)=0$

    dimana $x_1\ \&\ x_2$ akar-akar PK

- *Metode memakai rumus jumlah dan hasil kali akar-akar PK*
  $x^2-(x_1+x_2)x+x_1\,x_2=0$
  dimana x_1 & x_2 akar-akar PK

✓ Menyusun PK jika akar-akarnya diketahui mempunyai hubungan dengan akar-akar PK lainnya
Untuk menyusun PK dengan kriteria ini, juga ada dua metode:
- *Memakai rumus jumlah & hasil kali akar*
- *Penghapusan indeks, jika bentuk akar-akarnya simetris*

LATIHAN 6B.I

1. (AHSME, 1950/13/Book I) The roots $(x^2-3x+2)x\,(x-4)=0$ are ...
2. (AHSME, 1950/38/Book I) Jika ekspresi $\begin{vmatrix} a & c \\ d & b \end{vmatrix}$ mempunyai nilai ab-cd untuk semua nilai a, b, c, dan d, maka nilai x yang memenuhi persamaan $\begin{vmatrix} 2x & 1 \\ x & x \end{vmatrix}=3.$ adalah ...
3. (AHSME, 1950/42/Book I) The equation $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}=2$ is satisfied when x is equal to ...
4. (NYCIML, Fall 1976/27) Jika $c>a>0$ dan jika $a-b+c=0$, tentukan akar yang terbesar dari persamaan $ax^2+bx+c=0$.
5. (NYCIML, Fall 1978/9) Tentukan semua nilai x yang memenuhi
   $6\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-35\left(x+\frac{1}{x}\right)+50=0$
6. (NYCIML, Spring 1979/7) Grafik fungsi kuadrat melalui titik dengan koordinat $(-1,-2)$, $(1,0)$, $(2,7)$, dan $(3,y)$. Tentukan nilai y.
7. (NYCIML, Spring 1979/23) Jika n bilangan bulat positif, tentukan (dalam suku n) semua nilai x lebih dari 1 yang memenuhi $4x^{1/(2n)}-x^{1/n}-3=0$
8. (NYCIML, Fall 1980/29) If reciprocal dari (x+y) is equal to the sum of reciprocal of x and reciprocal of y, find all possible numerical value of $\frac{x}{y}$.
9. (NYCIML, Spring 1981/3) Find all ordered pairs (p,q) of real numbers for which $|p|=|q|=1$ and the equation $x^2+px+q=0$ has only real roots.
10. (NYCIML, Fall 1982/1) Tentukan semua bilangan real x yang memenuhi $x+\frac{1}{x}=\frac{10}{3}$.

LATIHAN 6B.II

1. (AMC12, 2001/23) A polynomial of degree four with leading coefficient 1 and integer coefficients has two real zeros, both of which are integers. Which of the following can also be a zero of polynomial?
   $\frac{1+i\sqrt{11}}{2}$; $\frac{1+i\sqrt{13}}{2}$; $\frac{1+i}{2}$; $\frac{1}{2}+i$; or $1+\frac{i}{2}$
2. (AMC12A, 2002/1) Berapa jumlah semua akar-akar dari persamaan $(2x+3)(x-4)+(2x+3)(x-6)=0$?

3. (AMC12A, 2002/12) Kedua akar-akar persamaan kuadrat $x^2 - 63x + k = 0$ adalah bilangan prima. Berapa banyak nilai k yang mungkin?
4. (AMC12A, 2002/13) Two different positive numbers a and b each differ from their reciprocals by 1. What is a + b?
5. (AMC12B, 2002/6) Andaikan a dan b bilangan real tidak nol, dan persamaan $x^2 + ax + b = 0$ mempunyai solusi a dan b. Berapakah pasangan yang mungkin untuk (a,b)?
6. (AMC12A, 2005/9) Ada dua nilai a yang memenuhi persamaan $4x^2 + ax + 8x + 9 = 0$ hanya mempunyai satu solusi untuk x. Berapakah jumlah dari dua nilai a tersebut?
7. (AMC12B, 2005/8) For how many values of a is it true that the line $y = x + a$ passes through the vertex of the parabola $y = x^2 + a^2$?
8. (AMC12B, 2005/12) Persamaan kuadrat $x^2 + mx + n = 0$ mempunyai akar-akar dua kali dari akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + px + m = 0$, dan tidak ada nilai m, n, dan p yang nol. Berapa nilai dari $\frac{n}{p}$?
9. (AMC12B, 2006/12) Parabola $y = ax^2 + bx + c$ mempunyai vertek/Titik balik (p,p) dan titik perpotongan dengan sumbu Y (0,-p) dimana p tidak sama nol. Berapa nilai b?
10. (AMC12B, 2007/24) Berapa banyak bilangan bulat positif (a,b) sedemikian sehingga FPB(a,b)=1 dan $\frac{a}{b} + \frac{14b}{9a}$ merupakan bilangan bulat?

c. Persamaan Eksponent

Sifat-Sifat Fungsi Eksponent

Jika $a, b \in \Re$, $a \neq 0$, m dan n bilangan rasional, maka sifat-sifat fungsi eksponent adalah sebagai berikut:

- ✓ $a^m . a^n = a^{m+n}$
- ✓ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- ✓ $(a^m)^n = a^{mn}$
- ✓ $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$
- ✓ $(a^m . b^n)^p = a^{mp} . b^{np}$
- ✓ $\left(\frac{a^m}{b^n}\right)^p = \frac{a^{mp}}{b^{np}}$
- ✓ $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$
- ✓ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^p}} = \sqrt[mn]{a^p} = a^{\frac{p}{mn}}$
- ✓ $a^0 = 1$

Persamaan Eksponent

1. Bentuk $a^{f(x)} = a^m$

   Jika $a^{f(x)} = a^m, a > 0, \& \ a \neq 1,$ maka $f(x) = m$

2. Bentuk $a^{f(x)} = a^{g(x)}$

   Jika $a^{f(x)} = a^{g(x)},\ a > 0 \ \& \ a \neq 1$ maka $f(x) = g(x)$

3. Bentuk $a^{f(x)} = b^{f(x)}, a \neq b$

   Jika $a^{f(x)} = b^{f(x)},\ a,b > 0, a,b \neq 1$, dan $a \neq b$ maka $f(x) = 0$

4. Bentuk $f(x)^{g(x)} = f(x)^{h(x)}$

   Jika $f(x)^{g(x)} = f(x)^{h(x)}$, maka penyelesaiannya adalah sebagai berikut:

   ✓ $g(x) = h(x)$
   ✓ $f(x) = 1$
   ✓ $f(x) = 0$, asalkan g(x) dan h(x) keduanya positif
   ✓ $f(x) = -1$, asalkan g(x) dan h(x) keduanya genap atau keduanya ganjil

5. Bentuk $a\left(k^{f(x)}\right)^2 + b\left(k^{f(x)}\right) + c = 0, b > 0, b \neq 1, a \neq 0, a,b,c \in \Re$
   Untuk menyelesaikan bentuk ini, ikuti langkah-langkah berikut:

   ✓ Memisalkan dahulu $y = k^{f(x)}$
   ✓ Dari pemisalan tersebut, akan diperoleh bentuk persamaan kuadrat dalam y, yakni $ay^2 + by + c = 0$
   ✓ Selesaikan persamaan kuadrat yang kamu peroleh tadi, sehingga diperoleh nilai y.
   ✓ Substitusikan nilai y tadi ke pemisalan semula, yakni $y = k^{f(x)}$
   ✓ Sehingga akan kita peroleh nilai x

LATIHAN 6C

1. (AMC12, 2001/5) Berapakah perkalian semua bilangan bulat ganjil positif kurang dari 10.000?

   A. $\dfrac{10000!}{(5000!)^2}$

B. $\frac{10000!}{2^{5000}}$

C. $\frac{9999!}{2^{5000}}$

D. $\frac{10000!}{2^{5000}.5000!}$

E. $\frac{5000!}{2^{5000}}$

2. (AMC12A, 2002/3) According to the standard convention for exponentiation, $2^{2^{2^{2}}} = 2^{\left(2^{\left(2^{2}\right)}\right)} = 2^{16} = 65.536$. If the order in which the exponentiations are performed is changed, how many other values are possible?

3. (AMC12A, 2004/6) Misalkan $U = 2.\,2004^{2005}$, $V = 2004^{2005}$, $W = 2003.\,2004^{2004}$, $X = 2.\,2004^{2004}$, $Y = 2004^{2004}$ dan $Z = 2004^{2003}$. Dari bilangan-bilangan berikut, mana yang paling besar?
   A. U – V
   B. V – W
   C. W – X
   D. X – Y
   E. Y - Z

4. (NYCIML, Fall 1977/30) Andaikan f dan g fungsi berturut-turut didefinisikan $f(x) = x + 2$ dan $g(x) = x$. Tentukan semua x>-2 yang memenuhi $3^{g(x).\log_3 f(x)} = f(x)$

5. (NYCIML, Fall 1981/8) Jika $2\left(4^{x}\right) + 6^{x} = 9^{x}$ dan $x = \log_{2/3} a$, tentukan nilai dari a?

6. (AHSME,1996/6/AMC7) Jika $f(x) = x^{(x+1)}(x+2)^{(x+3)}$, maka $f(0) + f(-1) + f(-2) + f(-3) = ...$

7. (AHSME,1998/5/AMC7) Jika $2^{1998} - 2^{1997} - 2^{1996} + 2^{1995} = k.2^{1995}$, Berapakah nilai k yang memenuhi?

d. Bentuk Akar

Konsep Bilangan Irasional

Sebelum kita mendefinisikan bilangan irasional, kita ulas kembali, pengertian dari bilangan rasional. Bilangan rasional merupakan bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{p}{q},\ p,q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0$.

Dari definisi di atas, maka dapat kita definisikan bahwa bilangan irasional merupakan bilangan yang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{p}{q},\ p,q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0$.

Bilangan Irasional	Bilangan Rasional
$\pi = 3,141592....$	$\frac{17}{99} = 0,17171717....$
$e = 2,718281.....$	$\sqrt{9} = 3,00000.....$
$\sqrt{2} = 1,414213.....$	4 = 4,000000....
$\sqrt{7} = 2,6457......$	$1,\overline{6} = 1,66666..... = \frac{15}{9}$

UJI DIRI:

Ubahlah bentuk desimal berikut ke bentuk rasional/pecahan:

- $1,\overline{7} = 1,777777......$
- $2,\overline{23} = 2,23232323....$
- $3,\overline{401} = 3,401401401....$

Definisi Bentuk Akar

Secara umum, bentuk akar ditulis dalam bentuk $\sqrt[n]{a}$

$\left(\sqrt[n]{a}\text{ dibaca "akar pangkat n dari a"}\right)$

dengan:

$\sqrt[n]{a}$ disebut bentuk akar (radikal)

$\sqrt{\ }$ disebut lambang bentuk akar

n disebut indeks (pangkat akar)

a disebut radikan (bilangan di bawah tanda akar), dengan a bilangan riil positif untuk n bilangan asli dan untuk n bilangan ganjil, a dapat berupa bilangan riil negatif.

Bentuk akar terbagi atas 2 jenis:

1. **Akar Senama**

   Suatu bentuk akar dikatakan akar senama jika indeks (pangkat akar)nya sama,

   Contoh:

   ✓ $\sqrt{7}, \sqrt{19}, \sqrt{31}$, mempunyai indeks 2

   ✓ $\sqrt[5]{2}, \sqrt[5]{7}, \sqrt[5]{19}$, mempunyai indeks 5

2. Akar Sejenis

Suatu bentuk akar dikatakan akar sejenis jika indeks dan radikannya sama,

Contoh:

- ✓ $\sqrt{7}, 2\sqrt{7}, 5\sqrt{7}$, mempunyai indeks 2 dan radikan 7
- ✓ $\sqrt[5]{2}, 3\sqrt[5]{2}, 7\sqrt[5]{2}$, mempunyai indeks 5 dan radikan 2

Operasi pada Bentuk Akar

Untuk semua bilangan real a dan b serta n bilangan asli maka berlaku:

1. $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$
2. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
3. $p\sqrt[n]{a} \pm q\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a}(p \pm q)$

Catatan:

Untuk sebarang a bilangan real dan a tidak sama dengan nol, m bilangan bulat, n bilangan asli, dan n lebih dari atau sama dengan 2 berlaku:

- ✓ $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$
- ✓ $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$

Merasionalkan Penyebut

- Bentuk $\frac{a}{\sqrt{b}}$, $b \neq 0$

  Cara merasionalkan bentuk ini adalah

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}}.\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a}{b}\sqrt{b}$$

- Bentuk $\frac{a}{b-\sqrt{c}} / \frac{a}{\sqrt{b}-c} / \frac{a}{b+\sqrt{c}} / \frac{a}{\sqrt{b}+c}$

  Cara merasionalkan bentuk ini adalah

- ✓ $\frac{a}{b-\sqrt{c}} = \frac{a}{b-\sqrt{c}}.\frac{b+\sqrt{c}}{b+\sqrt{c}} = \frac{a(b+\sqrt{c})}{b^2-c}$
- ✓ $\frac{a}{b+\sqrt{c}} = \frac{a}{b+\sqrt{c}}.\frac{b-\sqrt{c}}{b-\sqrt{c}} = \frac{a(b-\sqrt{c})}{b^2-c}$

- ✓ $\frac{a}{\sqrt{b}-c}=\frac{a}{\sqrt{b}-c}.\frac{\sqrt{b}+c}{\sqrt{b}+c}=\frac{a\left(\sqrt{b}+c\right)}{b\ \ -c^2}$
- ✓ $\frac{a}{\sqrt{b}+c}=\frac{a}{\sqrt{b}+c}.\frac{\sqrt{b}-c}{\sqrt{b}-c}=\frac{a\left(\sqrt{b}-c\right)}{b\ \ -c^2}$

➢ Bentuk $\frac{a}{\sqrt{b}\pm\sqrt{c}}$

Cara merasionalkan bentuk ini adalah

$$\frac{a}{\sqrt{b}\pm\sqrt{c}}=\frac{a}{\sqrt{b}\pm\sqrt{c}}.\frac{\sqrt{b}\mp\sqrt{c}}{\sqrt{b}\mp\sqrt{c}}=\frac{a\,(\sqrt{b}\mp\sqrt{c})}{b-c}$$

➢ Bentuk $\frac{a}{\sqrt[3]{b}\pm\sqrt[3]{c}}$

Cara merasionalkan bentuk ini adalah

$$\frac{a}{\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}=\frac{a}{\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}.\frac{\left(\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{c^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{c^2}\right)}=\frac{a\left(\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{c^2}\right)}{b+c}$$

$$\frac{a}{\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{c}}=\frac{a}{\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}.\frac{\left(\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{c^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{c^2}\right)}=\frac{a\left(\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{c^2}\right)}{b-c}$$

Menyederhanakan Bentuk Akar $\sqrt{(a+b)\pm 2\sqrt{ab}}$

Bentuk $\sqrt{(a+b)\pm 2\sqrt{ab}}$ dapat disederhanakan menjadi bentuk $\left(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\right)$ dengan a, b bilangan real dan $a > b$.

Contoh 1:

(OSK, 2013) Misalkan a dan b adalah bilangan asli dengan a > b. Jika $\sqrt{94+2\sqrt{2013}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$, maka nilai a – b adalah ...

Pembahasan:

Untuk $a,b\geq 0$ maka kita peroleh

$$\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

Sehingga untuk kasus

$$\sqrt{94+2\sqrt{2013}}=\sqrt{(61+33)+2\sqrt{61.33}}=\sqrt{61}+\sqrt{33}$$

Jadi, $a-b=61-33=28$.

Contoh 2:

Tentukan nilai dari $\left[1+\left[3+\sqrt{13+4\sqrt{3}}\right]^{1/2}\right]^{1/2}$

Pembahasan:

Perhatikan bahwa

$$\sqrt{13+4\sqrt{3}}=\sqrt{13+2\sqrt{12}}=\sqrt{(12+1)+2\sqrt{12.1}}=\sqrt{12}+1$$

$$\left[3+\sqrt{13+4\sqrt{3}}\right]^{1/2}=\sqrt{3+\left(\sqrt{12}+1\right)}=\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{(3+1)+2\sqrt{3.1}}=\sqrt{3}+1$$

$$\left[1+\left[3+\sqrt{13+4\sqrt{3}}\right]^{1/2}\right]^{1/2}=\sqrt{1+\left(\sqrt{3}+1\right)}=\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$=\sqrt{2+\frac{4}{4}\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{8+2\sqrt{12}}{4}}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{(6+2)+2\sqrt{6.2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$$

Contoh 3:

Tentukan nilai dari $\sqrt{45+20\sqrt{5}}+\sqrt{45-20\sqrt{5}}$

Pembahasan:

Alternatif 1

Perhatikan bahwa

$$\sqrt{45+20\sqrt{5}}=\sqrt{45+2\sqrt{500}}=\sqrt{(25+20)+2\sqrt{25.20}}=\sqrt{25}+\sqrt{20}$$

$$\sqrt{45-20\sqrt{5}}=\sqrt{45-2\sqrt{500}}=\sqrt{(25+20)-2\sqrt{25.20}}=\sqrt{25}-\sqrt{20}$$

Jadi, $\sqrt{45+20\sqrt{5}}+\sqrt{45-20\sqrt{5}}=\left(5+\sqrt{20}\right)+\left(5-\sqrt{20}\right)=10$

Alternatif 2

Misalkan $y=\sqrt{45+20\sqrt{5}}+\sqrt{45-20\sqrt{5}}$ maka

$$y^2=45+20\sqrt{5}+45-20\sqrt{5}+2\sqrt{45^2-20^2.5}$$

$$=90+2\sqrt{25}=100$$

$y = 10$

Contoh 4:

Jika $\frac{2015}{\sqrt[3]{6}-1} = a\left(\sqrt[3]{36} + \sqrt[3]{b} + 1\right)$ dimana $400 < a < 500$ maka tentukan nilai dari $a + b$.

Pembahasan:

$$\frac{2015}{\sqrt[3]{6}-1} = \frac{2015}{\sqrt[3]{6}-1} \cdot \frac{\left(\sqrt[3]{6^2} + \sqrt[3]{6} + 1\right)}{\left(\sqrt[3]{6^2} + \sqrt[3]{6} + 1\right)} = \frac{2015}{6-1}\left(\sqrt[3]{6^2} + \sqrt[3]{6} + 1\right)$$

$$= 403\left(\sqrt[3]{36} + \sqrt[3]{6} + 1\right)$$

Jadi, $a + b = 403 + 6 = 409$

LATIHAN SOAL 6.d

Bagian I

1. Diketahui

$$x = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}, \qquad y = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$$

Tentukan nilai dari $x^4 + y^4 + (x+y)^4$

2. Sederhanakan bentuk berikut dengan merasionalkan penyebutnya

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$$

3. (SSSMO, 2002) Hitunglah nilai dari

$$\left(\sqrt{10}+\sqrt{11}+\sqrt{12}\right)\left(\sqrt{10}+\sqrt{11}-\sqrt{12}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{11}+\sqrt{12}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{11}-\sqrt{12}\right)$$

4. Nilai x yang memenuhi $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x - \left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x = 3/2$ adalah ...

5. Hitunglah nilai dari

$$N = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{35}+\sqrt{21}+5}{\sqrt{3}+2\sqrt{5}+\sqrt{7}}$$

6. Diketahui bahwa:

$$\frac{2015}{2\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{2015}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \cdots + \frac{2015}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}} = \frac{a}{b}$$

dimana a dan b relatif prima, maka tentukan nilai dari $a + b$

7. Susunlah tiga bilangan berikut mulai dari yang terkecil sampai yang terbesar.

$$a = \sqrt{2013}-\sqrt{2012}, b = \sqrt{2014}-\sqrt{2013}, c = \sqrt{2015}-\sqrt{2014}$$

8. Banyaknya bilangan prima x yang memenuhi ketaksamaan

$$\frac{3}{1+\sqrt{3}} < x < \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$$

adalah ...

9. Hitunglah nilai dari

$$\frac{1}{1-\sqrt[4]{5}}+\frac{1}{1+\sqrt[4]{5}}+\frac{2}{1+\sqrt{5}}$$

10. (CHINA, 1993) Tentukan angka terakhir dari ekspresi

$$x=\left(\frac{-2a}{4+a}-\frac{\sqrt{|a|-3}+\sqrt{3-|a|}}{3-a}\right)^{1993}$$

11. (CHNMOL, 1993) Sederhanakan bentuk

$$\sqrt[3]{3}\left(\sqrt[3]{\frac{4}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{1}{9}}\right)^{-1}$$

12. (CHINA, 1998) Hitunglah nilai dari

$$\sqrt{\frac{1998 \text{ x } 1999 \text{ x } 2000 \text{ x } 2001+1}{4}}$$

13. Diketahui $a=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$, tentukan nilai dari

$$\frac{3}{a}+\frac{3}{a^2}+\frac{1}{a^3}$$

Bagian II

1. (SSSMO-J, 2007) Tentukan nilai dari

$$\frac{x^4-6x^3-2x^2+18x+23}{x^2-8x+15}$$

jika $x=\sqrt{19-8\sqrt{3}}$

2. Diketahui bahwa y adalah bilangan bulat yang mendekati bilangan

$$\sqrt{\frac{2}{\sqrt[3]{3}-1}+\sqrt[3]{3}}$$

Tentukan nilai dari $\sqrt{9+4\sqrt{y}}$.

3. (CHINA, 1998) Diketahui $x+y=\sqrt{3\sqrt{5}-\sqrt{2}},\ x-y=\sqrt{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}$, Tentukan nilai dari xy.

4. (CHINA, 1994) Sederhanakan bentuk $\sqrt{7-\sqrt{15}-\sqrt{16-2\sqrt{15}}}$

5. Sederhanakan bentuk $\sqrt{16+2(2+\sqrt{5})(2+\sqrt{7})}$

6. Sederhanakan bentuk

$$\sqrt{4+\sqrt{15}}+\sqrt{4-\sqrt{15}}-2\sqrt{3-\sqrt{5}}$$

7. (SSSMO-J, 2002) Tentukan nilai dari

$$\sqrt{\frac{2}{5-2\sqrt{6}}}-\sqrt{\frac{2}{5+2\sqrt{6}}}$$

e. Persamaan Logaritma

Definisi Logaritma

Misalkan $a > 0, a \neq 1$ bilangan real. Bilangan x disebut *logaritma* dari bilangan N , N > 0, dengan basis a jika $a^x = N$. Dalam kasus ini ditulis sebagai $x = \log_a N$

Sifat-Sifat Logaritma

Kita asumsikan bahwa $a > 0, a \neq 1, M > 0, N > 0$ maka berlaku sifat-sifat berikut:

1) $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$
2) $\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$
3) $a^{\log_a N} = N$
4) $\log_a N^\theta = \theta \ \log_a N,\ \theta$ sebarang bilangan real
5) $\log_{a^\theta}(N) = \frac{1}{\theta}\log_a N, \theta \neq 0$ bilangan real
6) $(\log_a b)(\log_b a) = 1,\ b > 0, b \neq 1$
7) $(\log_a b)(\log_b c) = \log_a c, \quad a, b, c > 0, a, b \neq 1$

Persamaan Logaritma

1) Bentuk $\log_a f(x) = \log_a n$

   Jika $\log_a f(x) = \log_a n, a > 0, a \neq 1, f(x) > 0$, maka f(x) = n

2) Bentuk $\log_a g(x) = \log_b g(x)$

   Jika $\log_a g(x) = \log_b g(x), a \neq b, a, b > 0, a, b \neq 1$, maka $g(x) = 1$

3) Bentuk $\log_a f(x) = \log_a g(x)$

   Jika $\log_a f(x) = \log_a g(x),\ a > 0, a \neq 1, f(x), g(x) > 0$, maka $f(x) = g(x)$

4) Bentuk $\log_{f(x)} g(x) = \log_{f(x)} h(x)$

   Jika $\log_{f(x)} g(x) = \log_{f(x)} h(x), f(x), g(x), h(x) > 0, f(x) \neq 1$, maka $g(x) = h(x)$

5) Bentuk $a\ \log^2{}_l f(x) + b\ \log_l f(x) + c = 0$

Untuk menyelesaikan bentuk ini, ikuti langkah-langkah berikut:

- ✓ Memisalkan dahulu $y = \log_l f(x)$
- ✓ Dari pemisalan tersebut, akan diperoleh bentuk persamaan kuadrat dalam y, yakni $ay^2 + by + c = 0$
- ✓ Selesaikan persamaan kuadrat yang kamu peroleh tadi, sehingga diperoleh nilai y.
- ✓ Substitusikan nilai y tadi ke pemisalan semula, yakni $y = \log_l f(x)$
- ✓ Sehingga akan kita peroleh nilai x
- ✓ Cek, nilai x tersebut harus menyebabkan nilai f(x) > 0

Contoh 1:

(AMC12B, 2003/17) Jika $\log_{10}(xy^3) = 1$ dan $\log_{10}(x^2y) = 1$, berapakah nilai $\log_{10}(xy)$?

Pembahasan:

Perhatikan bahwa

Dari $\log_{10}(xy^3) = 1$ dan $\log_{10}(x^2y) = 1$ maka kita peroleh

$\log_{10} x + 3\ \log_{10} y = 1 \ldots..(*)$

$2\log_{10} x + \log_{10} y = 1 \ldots \ldots (**)$

Dengan eliminasi/substitusi (*) dan (**), maka kita peroleh:

$$\log_{10} x = \frac{2}{5}\ \ \&\ \ \log_{10} y = \frac{1}{5}$$

Jadi, $\log_{10}(xy) = \log_{10} x + \log_{10} y = 3/5$

Contoh 2:

(AMC12A, 2002/14) Untuk semua bilangan bulat positif n, misalkan $f(n) = \log_{2002} n^2$..
Misalkan $N = f(11) + f(13) + f(14)$, maka nilai yang mungkin untuk N adalah

Pembahasan:

$N = f(11) + f(13) + f(14) = \log_{2002}(11.11.13.13.14.14) = \log_{2002} 2002^2 = 2$

Contoh 3:

(AMC12B, 2002/22) Untuk semua bilangan bulat n lebih dari 1, didefinisikan $a_n = (\log_n 2002)^{-1}$. Misalkan $b = a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ dan $c = a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14}$. Berapakah nilai b-c?

Pembahasan:

Kita mempunyai:

$a_n = \dfrac{1}{\log_n 2002} = \log_{2002} n$

$b - c = (\log_{2002}[2.3.4.5]) - (\log_{2002}[10.11.12.13.14])$

$$= \log_{2002}\left(\frac{2.3.4.5}{10.11.12.13.14}\right) = \log_{2002}\frac{1}{11.13.14} = -1$$

LATIHAN SOAL 6.e

1. (HSMC-USC, 2014) Misalkan bilangan a didefinisikan
$$\log_a(10) + \log_a(10^2) + \cdots + \log_a(10^{10}) = 110.$$
Tentukan nilai a?
2. (HSMC-USC, 2008) Tentukan nilai dari $\log_2\left((\log_{81} 3)^{\log_3 81}\right)$
3. (HSMC-USC, 2012) Berapakah nilai dari $(\log_2 3)(\log_3 4)(\log_4 5) \ldots (\log_{63} 64)$?
4. (HSMC-USC, 2012) Jika x & y bilangan real positif, yang keduanya tidak sama dengan 1, tentukan nilai terkecil non-negatif dari $\log_x y + \log_y x$.
5. (HSMC-USC, 2011) Jika $x = \log_9 2$ & $y = \log_5 4$, tentukan $\log_6 15$ dalam suku x dan y
6. (HSMC-USC, 2010) Andaikan a dan x dua bilangan real positif yang memenuhi $\log_a x + \log_x a = 3$. Tentukan nilai dari $(\log_a x)^2 + (\log_x a)^2$.
7. (HSMC-USC, 2010) Andaikan $\log_4 x = \frac{1}{3}$, berapakah nilai dari $\log_x 8$?
8. (HSMC-USC, 2006) Tentukan nilai dari
$$\frac{\log_2 3 \,.\, \log_4 5 \,.\, \log_6 7}{\log_4 3 \,.\, \log_6 5 \,.\, \log_8 7}$$
9. (HSMC-USC, 2006) Didefinisikan barisan $s_1 = 2^{2006}$ dan untuk $n \geq 1$,
$$s_{n+1} = \begin{cases} \log_2 s_n, & jika\ s_n > 0 \\ 0, & s_n \leq 0 \end{cases}$$
Tentukan nilai terkecil bilangan bulat n sehingga $s_n < 1$
10. (HSMC-USC, 2003) Misalkan a dan b dua solusi positif persamaan
$$\log_{3x} 3 + \log_{27} 3x = -\frac{4}{3}$$
Berapa nilai dari $a + b$?
11. (HSMC-USC, 2001) Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan
$$\log_4 \sqrt{x^{4/3}} + 3\ \log_x(16x) = 7$$
12. (HSMC-USC, 2000) Berapa banyak solusi yang dimiliki persamaan $\log_x(5x-2) = 3$ untuk bilangan real $x > \frac{2}{5}$?
13. (HSMC-USC, 2013) Tentukan nilai k sehingga persamaan $\log_{10}(kx) = 2\log_{10}(x+1)$ mempunyai tepat satu akar real.

7. **Barisan dan Deret**

Pendahuluan Barisan

Perhatikan barisan sederhana berikut: 1, 2, 3, 4, ... Ini mudah kita dapat menentukan suku berikutnya, yakni dengan menambah 1 suku sebelumnya. Jadi, rumus suku ke-n barisan sederhana ini adalah n. Di bawah ini ada tabel tentang rumus suku ke-n suatu barisan:

Barisan	Rumus Suku Ke-n
1, 3, 5, ...	2n - 1
13, 8, 3, ...	18-5n
1, 4, 9, 16, ...	n^2
1/2, 1/4, 1/8, ...	$1/2^n$
$\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{8}, \ldots$	$1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

NB: untuk $n \in \mathbb{N}$ dan $n = 1$ berkorespondensi dengan suku ke-1 dari suatu barisan, $n = 2$ berkorespondensi dengan suku ke-2 dari suatu barisan, dst.

Notasi Penjumlahan

Perhatikan penulisan jumlah dari kuadrat n bilangan asli pertama dalam notasi sigma adalah $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2$. Contoh lain penulisan dalam notasi sigma adalah sebagai berikut:

- ✓ $1 - 2 + 4 - 8 + \ldots + (-2)^n = \sum_{i=0}^{n} (-2)^i$
- ✓ $1! + 2! + 3! + \ldots + n! = \sum_{i=1}^{n} i!$

Contoh-contoh di atas merupakan jumlah berhingga, berikut diberikan contoh jumlah tak berhingga:

- ✓ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots. = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 2$
- ✓ $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} 2^i = +\infty$

Contoh 1:

Tentukan nilai $\sum_{i=1}^{4} \frac{(2n)!}{2^n}$ (*n!=1.2.3....(n-1).n*)

Pembahasan:

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{(2n)!}{2^n} = \frac{2!}{2} + \frac{4!}{4} + \frac{6!}{8} + \frac{8!}{16} = 1 + 6 + 90 + 2520 = 2617.$$

Barisan & Deret Aritmatika (Deret Hitung)

Pada saat di SMP Kelas IX, telah di bahas tentang baik Barisan dan deret Aritmatika maupun geometri. Di sini akan direview tentang rumus suku ke-n, rumus jumlah n suku pertama, dan rumus suku tengah.

$$U_n = a + (n-1)b$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a + U_n) = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b)$$

$U_t = \dfrac{a + U_n}{2}$, dimana n merupakan bilangan ganjil

Ket:

U_n : Suku ke-n

S_n : Jumlah n suku pertama

U_t : Suku tengah

$a, b, \& \ n$ berturut-turut: suku pertama, beda, dan banyaknya suku

$b = U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = ... = U_n - U_{n-1}$

Perhatikan deret berikut, $1 + 2 + 3 + ... + (n-1) + n$, merupakan jumlah n suku pertama bilangan asli, juga merupakan deret aritmatika dengan a=b=1. Sehingga

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b) = \frac{n}{2}(2 + (n-1)) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Jadi, $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Contoh 2:

Tentukan nilai jumlah: $1996^2 - 1995^2 + 1994^2 - 1993^2 + ... + 2^2 - 1^2$

Pembahasan:

Jumlah pada soal, dapat kita tulis sebagai

$(1996^2 - 1995^2) + (1994^2 - 1993^2) + ... + (2^2 - 1^2)$ dan jika kita amati maka terdapat 998 pasang bilangan. Sehingga dapat dapat menulis dalam notasi sigma,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{998}\left((2n)^2 - (2n-1)^2\right) &= \sum_{i=1}^{998}\left(4n^2 - (4n^2 - 4n + 1)\right)\\ &= \sum_{i=1}^{998}(4n-1)\\ &= 4\sum_{i=1}^{998} n - \sum_{i=1}^{998} 1\\ &= \frac{4(998)(998+1)}{2} - 998 = 998000.\end{aligned}$$

Contoh 3:

(OSK, 2009) Jika $x_{k+1} = x_k + \frac{1}{2}$ untuk $k = 1, 2, 3, ...$ dan $x_1 = 1$ maka $x_1 + x_2 + \cdots + x_{400} = \cdots$

Pembahasan:

Perhatikan bahwa $x_{k+1} - x_k = \frac{1}{2}$ & $x_1 = 1$.

Ini merupakan deret aritmatika dengan beda 2 dan suku pertama 1.

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{400} = S_{400} = \frac{400}{2}\left(2.1 + 399.\frac{1}{2}\right) = 200(2 + 199{,}5) = 40300.$$

LATIHAN SOAL 7.(i)

1. (HSMC-USC, 2010) Berapa bilangan bulat positif terkecil sehingga $1 + 2 + 3 + \cdots + n > 100$?
2. Misalkan $\{a_k\}$ adalah barisan bilangan bulat sehingga $a_1 = 1$ dan

$a_{m+n} = a_m\, a_n + mn$ untuk setiap bilangan bulat positif m dan n. Maka a_{2015} adalah ...

3. Diketahui $U_1, U_2, U_3, \ldots$ dengan $U_n - U_{n-1} + U_{n-2} = 0$ untuk $n \geq 2$. Jika $S_{1492} = 1865$ dan $S_{1865} = 1492$. Tentukan $S_{1492+1865}$.

   Catatan: $(S_n = \sum_{i=1}^{n} U_i)$

4. Jika jumlah 2015 bilangan bulat positif berurutan adalah sebuah bilangan kuadrat sempurna. Tentukan nilai minimum dari ke 2015 bilangan tersebut.

5. Misalkan $\{u_i\}$ adalah barisan aritmatika dengan

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_{100} = 100 \; \& \; u_{101} + u_{102} + \cdots + u_{200} = 200$$

   Berapakah nilai dari $u_{2015} - u_{2014}$.

6. (OSK, 2006) Diketahui $x + (x+1) + (x+2) + \cdots + 50 = 1139$. Jika x bilangan positif, maka $x = \cdots$

7. (OSK 2006) Barisan 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, $\cdots$ terdiri dari semua bilangan asli yang bukan kuadrat atau pangkat tiga bilangan bulat. Suku ke-250 barisan adalah $\cdots\cdots$

8. (OSP, 2009) Bilangan rasional $a < b < c$ membentuk barisan hitung (aritmatika) dan $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 3$. Banyaknya bilangan positif a yang memenuhi adalah ...

9. (OSK, 2006) Pada sebuah barisan aritmatika, nilai suku ke-25 tiga kali nilai suku ke-5. Suku yang bernilai dua kali nilai suku pertama adalah suku ke ...

10. (OSP 2011) Diberikan barisan bilangan rasional $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ yang didefinisikan dengan

    $a_1 = 2$ dan $a_{n+1} = \dfrac{a_n - 1}{a_n + 1}$, $n \in \mathbb{N}$. Nilai a_{2011} adalah ....

11. (SPMB, 2002/II) Enam buah bilangan membentuk deret aritmatika. Jika jumlah empat bilangan pertama adalah 50 dan jumlah empat bilangan terakhir adalah 74, maka jumlah bilangan ketiga dan keempat adalah ....

12. (SPMB, 2002/III) Suatu deret aritmatika terdiri dari sepuluh suku dan jumlahnya 145. Jika jumlah dari suku keempat dan suku kesembilan sama dengan lima kali suku ketiganya, maka beda deret adalah ....

13. (AIME, 1989) k adalah bilangan bulat positif yang memenuhi $36 + k, 300 + k, 596 + k$ adalah kuadrat dari tiga bilangan yang membentuk barisan aritmatika. Tentukan k.

Barisan & Deret Geometri (Deret Ukur)

Berikut rumus-rumus berkaitan dengan barisan geometri:

$$U_n = ar^{n-1},\ \ S_n = \begin{cases} \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1}, & r > 1 \\ \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r}, & r < 1 \end{cases}$$

Keterangan:

U_n : Suku ke-n

S_n : Jumlah n suku pertama

$a, r, \& n$: Berturut-turut menyatakan suku pertama, rasio, dan banyaknya suku

$$r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} = \cdots = \frac{U_n}{U_{n-1}}$$

Contoh 1:

Rumus jumlah n suku pertama diberikan sebagai berikut: $3^n - 1$, berpakah suku pertama deret ini? Apakah deret ini merupakan deret geometri dan jika ya, berapakah rasionya?

Pembahasan:

$$S_n = 3^n - 1 \text{ dan } S_{n-1} = 3^{n-1} - 1.$$

Sekarang, rumus suku ke-n deret ini:

$$U_n = S_n - S_{n-1} = 3^n - 1 - 3^{n-1} + 1 = 2.3^{n-1}.$$

Jadi, $U_1 = a = 2$.

Jelas, ini merupakan deret geometri dengan rasio 3.

Contoh 2:

Tentukan rumus jumlah n suku deret: $\frac{3}{2} + \frac{21}{4} + \frac{63}{8} + \frac{177}{16} + ...$

Pembahasan:

$$\frac{3}{2} + \frac{21}{4} + \frac{63}{8} + \frac{177}{16} + ...$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(5 + \frac{1}{4}\right) + \left(8 - \frac{1}{8}\right) + \left(11 + \frac{1}{16}\right) + ...$$

$$= \left(2 - \frac{1}{2}\right) + \left(5 + \frac{1}{4}\right) + \left(8 - \frac{1}{8}\right) + \left(11 + \frac{1}{16}\right) + ...$$

$$= \left(2 + \left(\frac{-1}{2}\right)\right) + \left(5 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right) + \left(8 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3\right) + \left(11 + \left(-\frac{1}{2}\right)^4\right) + ...$$

$$= (2 + 5 + 8 + 11 + ...) + \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^4 + ...\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (3i - 1) + \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^i$$

$$=3\sum_{i=1}^{n} i-n-\frac{1}{2}\left(\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}-1}{-\frac{1}{2}-1}\right)=\frac{3n(n+1)}{2}-n+\frac{1}{3}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}-1\right)$$

$$=\frac{3n^{2}+n}{2}+\frac{1}{3}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}-1\right)=\frac{n(3n+1)}{2}+\frac{1}{3}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}-1\right).$$

LATIHAN SOAL 7.(ii)

1. (SPMB, 2002/II) Jika tiga bilangan q, s, dan t membentuk barisan geometri, maka tunjukkan bahwa $\frac{q+2s+t}{q+s}=\frac{q+s}{q}$
2. (OSK, 2014) Diberikan tiga bilangan bulat positif berurutan. Jika bilangan pertama tetap, bilangan kedua ditambah 10 dan bilangan ketiga ditambah bilangan prima, maka ketiga bilangan ini membentuk deret ukur. Bilangan ketiga dari bilangan bulat berurutan adalah ....
3. (CMO, 1975) Pada sebuah bilangan positif 3,27 mempunyai arti bahwa 3 mewakili bagian bulat dari bilangan dan 0,27 mewakili bagian desimal suatu bilangan. Tentukan bilangan positif yang memenuhi bagian desimal, bagian bulat, dan bilangan itu sendiri membentuk barisan geometri.
4. (CMO, 1979) Buktikan bahwa $A_1A_2 \geq G_1G_2$ jika
   i. $a, b > 0$
   ii. a, A_1, A_2, b adalah barisan aritmatika dan
   iii. a, G_1, G_2, b adalah barisan geometri.

8. Prinsip Teleskopik

Ada dua bentuk umum dari prinsip teleskopik, yakni penjumlahan dan perkalian.

✓ $$\sum_{k=2}^{n}(F_k-F_{k-1})=(F_2-F_1)+(F_3-F_2)+\ldots+(F_{n-1}-F_{n-2})+(F_n-F_{n-1})=F_n-F_1$$

✓ $$\prod_{k=2}^{n}\frac{F_k}{F_{k-1}}=\frac{F_2}{F_1}.\frac{F_3}{F_2}.\frac{F_4}{F_3}\ldots.\frac{F_{n-1}}{F_{n-2}}.\frac{F_n}{F_{n-1}}=\frac{F_n}{F_1}.$$

Contoh 1:

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{2015}\right)=\ldots.$$

Solusi:

Ini merupakan salah satu contoh penerapan dari teleskopik perkalian,

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{2015}\right)=\frac{3}{4}.\frac{4}{5}.\frac{5}{6}.....\frac{2014}{2015}.=\frac{3}{2015}.$$

Contoh 2:

Hitunglah bentuk dari $\sum_{k=1}^{2015} k!\,k$

Solusi:

Jika kita tulis, $k!\,k = k!\,(k+1-1) = (k+1)! - k!$, maka soal di atas dapat ditulis menjadi

$\sum_{k=1}^{2015} \left((k+1)! - k!\right)$ setelah menerapkan konsep teleskopik penjumlahan kita dapat

$$\sum_{k=1}^{2015} k!\,k = (2015)! - 1.$$

Contoh 3:

Buktikan bahwa $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$

Solusi:

Perhatikan bahwa:

$$\prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)=\prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n}\right).\prod_{n=2}^{N}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\prod_{n=2}^{N}\frac{n-1}{n}\prod_{n=2}^{N}\frac{n+1}{n}$$

$$=\frac{1}{N}.\frac{N+1}{2}=\frac{N+1}{2N}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2N}$$

Ketika N medekati takhingga, maka $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$. (Terbukti)

Contoh 4:

Buktikan bahwa

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}=9$$

Solusi:

Dengan merasionalkan penyebut masing-masing suku pada ruas kiri dan menggunakan prinsip teleskopik penjumlahan maka kita peroleh:

$-[(1-\sqrt{2})+(\sqrt{2}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{99}-\sqrt{100})]=-(1-10)=9$ (terbukti)

Contoh 5:

Hitunglah $1.1! + 2.2! + 3.3! + \cdots + 7.7!$

Solusi:

Perhatikan bahwa

$$(n+1)! - n! = (n+1).n! - n! = n.n!$$

Sehingga permasalahn pada soal ekuivalen dengan

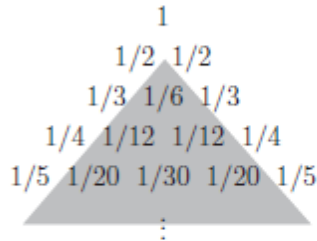
$(2! - 1!) + (3! - 2!) + (4! - 3!) + \cdots + (8! - 7!) = 8! - 1! = 40320 - 1 = 40319.$

LATIHAN SOAL 8

1. (HSMC-USC, 2011) Misalkan $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{2011^2}\right) = \frac{x}{2.2011}$. Tentukan nilai dari x.
2. (HSCM-USC, 2010) Berapakah nilai dari
$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{99}{100!}$$
3. (HSMC-USC, 2007) Berapakah nilai dari
$$\frac{3}{1!+2!+3!} + \frac{4}{2!+3!+4!} + \frac{5}{3!+4!+5!} + \cdots + \frac{2007}{2005!+2006!+2007!}?$$
4. (HSMC-USC, 2003) Berapakah nilai dari
$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{2003^2}\right)?$$
5. Tentukan hasil dari
$$\sqrt{1+\frac{1}{3}}.\sqrt{1+\frac{1}{4}}.\sqrt{1+\frac{1}{5}}\ldots.\sqrt{1+\frac{1}{2014}}.\sqrt{1+\frac{1}{2015}}$$
6. Untuk bilangan real x dirumuskan suatu fungsi
$$f(x) = \frac{1}{1+2^x}$$
Maka tentukan hasil dari
$$\sum_{i=-2014}^{2014} f(i).$$
7. Nilai dari
$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{2014.2015}$$
8. Tentukan nilai dari
$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+4+\cdots+2015}$$

9. Segitiga harmonik (Variasi dari Segitiga Pascal) mempunyai sifat-sifat berikut:
   i) Baris ke-n mempunyai n elemen/entri, elemen pertama dan terakhir adalah 1/n.
   ii) Tiap-tiap elemen adalah jumlah dari dua elemen dibawahnya langsung (pada baris sesudahnya).

   Beberapa baris segitiga harmonic disajikan dalam gambar berikut:

   1
   1/2 1/2
   1/3 1/6 1/3
   1/4 1/12 1/12 1/4
   1/5 1/20 1/30 1/20 1/5
   ⋮

   Semua jumlah dari elemen/entri segitiga harmonik adalah $\sum_{n=1}^{\sim}\frac{1}{n}$ adalah divergen.

   Tentukan jumlah semua elemen/suku pada daerah yang diarsir.

10. (HSMC-USC, 2014) Barisan bilangan $\{a_n\}$ didefinisikan sebagai

    $a_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$ dimana n bilangan bulat positif. Jumlah n suku pertama barisan $\{a_n\}$ didefinisikan sebagai $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Berapa banyak suku-suku dalam barisan $S_1, S_2, \ldots, S_{2014}$ yang merupakan bilangan rasional?

    NB: $S_1 = a_1 = \frac{1}{2+\sqrt{2}}$ irrasional

11. (HSMC-USC, 2000) Pertidaksamaan berikut berlaku untuk semua bilangan bulat positif n:

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{4n+1}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$$

    Berapa nilai bilangan bulat terbesar yang kurang dari

$$\sum_{n=1}^{24} \frac{1}{\sqrt{4n+1}}?$$

9. Metode Pembuktian

Pada hakekatnya, semua soal dalam matematika mempunyai struktur yang sama. Struktur tersebut berbentuk *Implikasi*. Implikasi merupakan pernyataan majemuk yang berbentuk "$p \Longrightarrow q$", dibaca jika *p* maka *q*. Adapun tabel kebenaran untuk implikasi adalah

p	q	$p \Rightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

Dari bentuk implikasi kita dapat membentuk implikasi baru. Implikasi baru itu adalah konvers, invers, dan kontraposisi.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$	$q \Rightarrow p$	$\sim p \Rightarrow \sim q$
		Implikasi	**Kontraposisi**	**Konvers**	**Invers**
B	B	B	B	B	B
B	S	S	S	B	B
S	B	B	B	S	S
S	S	B	B	B	B

Dari tabel di atas maka jelas bahwa

- Implikasi ekuivalen dengan Kontraposisi
- Konvers ekuivalen dengan Invers.

Berikut ini akan dibahas dua metode pembuktian dalam matematika:

A. Bukti Langsung

Metode ini merujuk pada proposisi bahwa

Jika kita misalkan bahwa p bernilai benar maka dengan informasi yang sudah kita punyai dari p, kita harus membuktikan bahwa q benar. Secara umum alur dari metode ini adalah:

Proposisi: Jika p, maka q.
Bukti:
Andaikan p
…….
……
…….
Jadi q berlaku.

Contoh 1:

Misalkan x dan y bilangan positif. Jika $x \leq y$, maka buktikan bahwa $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$.

Pembahasan:

Andaikan $x \leq y$

Kurangkan y dari kedua sisi, maka kita peroleh

$x - y \leq 0$

$\left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(\sqrt{y}\right)^2 \leq 0$

$\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right) \leq 0$

Karena x, y bilangan positif, maka $\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)$ merupakaan bilangan positif

Bagi kedua ruas dengan $\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)$ maka kita peroleh

$\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq 0$. Ini berarti $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$

Jadi terbukti bahwa $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$

Contoh 2:

Buktikan bahwa jika x, y bilangan real positif maka $2\sqrt{xy} \leq x + y$.

Pembahasan:

Andaikan x, y bilangan real positif

Maka kita mempunyai $(x - y)^2 \geq 0$

$x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$

$x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy$

$(x + y)^2 \geq 4xy$

$x + y \geq 2\sqrt{xy}$

Jadi, terbukti bahwa $2\sqrt{xy} \leq x + y$.

LATIHAN SOAL 9.A

1. Misalkan $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sehingga

$$f\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$. Buktikan bahwa f fungsi konstan.

2. Misalkan a, b, c adalah bilangan real bukan nol yang berbeda sehingga

$$a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}$$

Buktikan bahwa $(abc)^2 = 1$

3. Jika $(px - r)$ & $(x - r)$ merupakan faktor dari sukubanyak

$$f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$$

dengan p, q, r tidak sama dengan nol maupun satu. Buktikan bahwa

$$\frac{pq + pr + q}{p^2 + p + 1} = -1$$

4. Misalkan $A = \sqrt{5} + \sqrt{22 + 2\sqrt{5}}$ dan

$$B = \sqrt{11 + 2\sqrt{29}} + \sqrt{16 - 2\sqrt{29} + 2\sqrt{55 - 10\sqrt{29}}}$$

Buktikan bahwa $A - B = 0$

5. Jika $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ memenuhi persamaan

$$(a + b)^2 + a^2 + b^2 = (c + d)^2 + c^2 + d^2,$$

buktikan bahwa $(a + b)^4 + a^4 + b^4 = (c + d)^4 + c^4 + d^4$.

B. Kontradiksi

Cara pembuktian dengan metode ini adalah sebagai berikut:

1. Pernyataan diasumsikan salah
2. Kita harus menemukan suatu pertentangan dengan kondisi yang sudah diketahui di soal/fakta dalam matematika/teorema sebelumnya. Kontradiksi ini menunjukkan bahwa pernyataan pada soal adalah benar.

Untuk lebih memperjelas tentang metode pembuktian dengan kontradiksi, maka perhatikan beberapa contoh berikut:

Contoh 1:

Buktikan bahwa tidak ada fungsi $f: \mathbb{Z} \to \{1, 2, 3\}$ yang memenuhi $f(x) \neq f(y)$ untuk semua $x, y \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $|x - y| \in \{2, 3, 5\}$

Pembahasan:

Andaikan f ada.

Misalkan $f(0) = a$ & $f(5) = b, a, b \in \{1, 2, 3\}$, $a \neq b$.

Karena $|5 - 2| = 3$, $|2 - 0| = 2$ maka kita mempunyai $f(2) \neq a, b$

Sehingga katakana saja bahwa $f(2) = c$

Akhirnya karena $|3 - 0| = 3, |3 - 5| = 2$, kita mempunyai $f(3) = c$

Sehingga $f(2) = f(3)$

Dari kondisi tersebut di atas maka untuk sebarang x yang tidak sama dengan nol, maka kita peroleh $f(x + 2) = f(x + 3)$. Jelas hal ini kontradiksi dengan yang diketahui bahwa untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}$ berlaku $f(x) \neq f(y)$.

Jadi, terbukti bahwa tidak ada fungsi f yang memenuhi kondisi pada soal.

Contoh 2:

(COMC, 1999) Jika $(bd + cd)$ adalah bilangan ganjil, tunjukkan bahwa sukubanyak $x^3 + bx^2 + cx + d$ tidak dapat diekspresikan ke dalam bentuk $(x + r)\,(x^2 + px + q)$ dengan b, c, d, r, p & q semuanya adalah bilangan bulat.

Pembahasan:

Andaikan sukubanyak $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ dapat dinyatakan ke dalam bentuk $(x + r)\,(x^2 + px + q)$ dengan $b, c, d, r, p\ \&\ q$ semuanya adalah bilangan bulat, maka kita peroleh:

$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d = (x + r)\,(x^2 + px + q) = x^3 + (p + r)x^2 + (pr + q)x + qr$

Dari kesamaan di atas, maka

$qr = d \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$pr + q = c \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

$p + r = b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$

Karena $bd + cd = (b + c)d$ bilangan ganjil maka jelas bahwa d dan $b + c$ keduanya ganjil. Karena d ganjil maka persamaan (1) maka jelas bahwa q dan r juga ganjil. Dari persamaan (2) dan (3) kita peroleh:

$b + c = (p + r) + (pr + q) = p(1 + r) + r + q$

Karena ruas kiri adalah bilangan ganjil. Karena r ganjil maka $p(1 + r)$ genap. Untuk q ganjil maka $r + q$ genap. Sehingga ruas kanan genap. Hal ini suatu kontradiksi.

Jadi, Terbukti jika $(bd + cd)$ adalah bilangan ganjil, tunjukkan bahwa sukubanyak $x^3 + bx^2 + cx + d$ tidak dapat diekspresikan ke dalam bentuk $(x + r)\,(x^2 + px + q)$ dengan $b, c, d, r, p\ \&\ q$ semuanya adalah bilangan bulat.

LATIHAN SOAL 9.B

1. (COMC, 2001) Misalkan $g(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ dengan p, q, dan r bilangan bulat. Buktikan bahwa jika $g(0)$ dan $g(-1)$keduanya ganjil maka tidak mungkin ketiga akar persamaan $g(x) = 0$ semuanya bilangan bulat.
2. (JMM, No 11/2009) Buktikan bahwa system persamaan

$$\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z} = 3x + y + z$$

$$y - z = \sqrt{3yz}$$

   tidak memiliki solusi real taknol (x, y, z).
3. Diberikan a, b, c adalah bilangan real serta a dan $4a + 3b + 2c$ mempunyai tanda yang sama. Tunjukkan bahwa persamaan $ax^2 + bx + c = 0$ kedua akarnya tidak mungkin terletak pada interval $(1,\ 2)$.

BAB II
TEORI BILANGAN

1. Keterbagian

Definisi

Jika a dan b bilangan bulat dengan $a \neq 0$, kita katakan a *membagi* b jika ada bilangan bulat c sedemikian sehingga $b = ac$. Jika a membagi b, kita katakan juga bahwa a adalah *pembagi* atau *faktor* dari b atau b merupakan *kelipatan* dari a.

Jika a membagi b dapat kita tulis $a|b$ dan jika a *tidak* membagi b, kita tulis $a \nmid b$.

Contoh 1:

Berdasarkan ilustrasi tentang konsep keterbagian dari bilangan bulat, maka

$$13|182, -5|30, 17|289, -3|33, 2015|0, \quad \& \ 7 \nmid 51$$

Contoh 2:

Pembagi dari 6 adalah $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \& \pm 6$. Adapun pembagi dari 17 adalah ± 1 dan ± 17.

Sifat-Sifat Keterbagian

Jika a, b, c, m, dan n merupakan bilangan bulat maka berlaku sifat-sifat berikut:

a. $a|a$ (**setiap bilangan bulat membagi dirinya sendiri**)

b. Jika $a|b$ & $b|c$, maka $a|c$. (**sifat transitif**)

c. Jika $c|a$ & $c|b$, maka $c|(x\,a + y\,b)$. (**sifat kelinieran**)

d. Jika $a|b$, maka $ca|cb$. (**sifat perkalian**)

e. $1|a$

f. Jika $a|1$, maka $a = \pm 1$

g. $a|0, \ a \neq 0$

h. Jika $a|b$ & $b|a$ maka $a = \pm b$

Bukti untuk sifat a & d – h diserahkan kepada pembaca. Sekarang akan kita buktikan sifat b dan c.

Sifat b

Karena $a|b$ dan $b|c$ maka ada bilangan bulat e dan f sedemikian sehingga $b = ae$ dan $c = bf$. Perhatikan bahwa $c = (ae)f = a(ef)$. Karena e dan f bilangan bulat, maka ef juga bilangan bulat, sehingga dapat kita simpulkan bahwa $a|c$. (terbukti)

Sifat c

Karena $c|a$ dan $c|b$ maka ada bilangan bulat e dan f sedemikian sehingga $a = ce$ dan $b = cf$. Perhatikan bahwa $ma + nb = m\,(ce) + n(cf) = c\,(me + nf)$. Karena m, e,n,f bilangan bulat maka me+nf juga bilangan bulat Sehingga dapat kita simpulkan bahwa $c|(ma + nb)$. (terbukti)

Contoh 3-a:

Karena $3|21$ & $3|33$, berdasarkan sifat c maka 3 membagi $5 \times 21 - 3 \times 33 = 105 - 99 = 6$.

Contoh 3-b:

Buktikan bahwa untuk semua bilangan bulat n, $n^2 + 3n + 5$ tidak habis dibagi oleh 121.

Pembahasan:

Perhatikan bahwa $n^2 + 3n + 5 = (n+7)(n-4) + 33$.

Sehingga $11|n^2 + 3n + 5 \Leftrightarrow 11|(n+7)(n-4)$. Jadi, jika $11 \nmid (n+7)(n-4)$ maka 121 tidak membagi $n^2 + 3n + 5$.

Kita asumsikan 11 membagi (n+7)(n-4), maka $11|n+7 \ atau \ 11|n-4$.

Karena $11|n+7$ & $11|n-4$, maka $121|(n+7)(n-4)$.

Jelas bahwa $121 \nmid 33$, sehingga $121 \nmid (n+7)(n-4) + 33$.

Jadi, untuk kasus ini terbukti bahwa $121 \nmid n^2 + 3n + 5$.

Algoritma Pembagian

Jika a dan b bilangan bulat sedemikian sehingga $b > 0$, maka terdapat secara unik bilangan bulat q dan r sedemikian sehingga $a = bq + r$ dimana $0 \leq r < b$.

Ket: q merupakan hasil bagi, r merupakan sisa pembagian, a merupakan bilangan yang dibagi, dan b adalah pembagi.

Perhatikan bahwa a dapat habis dibagi b jika dan hanya jika sisa pada lagoritma pembagian sama dengan nol.

Contoh 4:

Jika a=133 dan b=21, maka q=6 dan r=7, Karena $133 = 21 \times 6 + 7$. Dan juga Jika a=-50 dan b=8, maka q=-7 dan r=6, Karena $-50 = 8(-7) + 6$.

Definisi

Jika sisa ketika n dibagi 2 adalah 0, maka $n = 2k$ untuk suatu bilangan bulat positif k dan ini kita sebut bahwa n adalah *bilangan genap.* Sedangkan Jika sisa ketika n dibagi 2 adalah 1, maka $n = 2k + 1$ untuk suatu bilangan bulat positif k dan ini kita sebut bahwa n adalah *bilangan ganjil.*

Dengan cara yang sama, ketika d=4, kita gunakan algoritma pembagian di atas: Jika n dibagi dengan 4, maka sisanya adalah 0, 1, 2, atau 3. Sehingga, setiap bilangan bulat dapat berbentuk: $4k,\ 4k+1,\ 4k+2, \text{atau}\ 4k+3$, untuk suatu bilangan bulat k.

Uji Keterbagian Suatu Bilangan

Misalkan n bilangan bulat positif yang ditulis dalam basis 10:

a. Bilangan n habis dibagi 2 jika dan hanya jika digit terakhirnya merupakan bilangan genap.

b. Bilangan n habis dibagi 3 jika dan hanya jika jumlah semua digit-digitnya habis dibagi 3.

c. Bilangan n habis dibagi 4 jika dan hanya jika dua digit terakhirnya merupakan bilangan yang habis dibagi 4.

d. Bilangan n habis dibagi 5 jika dan hanya jika digit terakhirnya merupakan digit 0 atau 5.

e. Bilangan n habis dibagi 6 jika dan hanya jika jumlah semua digit-digitnya habis dibagi 3 dan digit terakhirnya merupakan bilangan genap.

f. Bilangan n habis dibagi 7 jika dan hanya jika digit terakhirnya dikalikan 2, dan menjadi pengurang dari bilangan sisa dan hasilnya habis dibagi 7.

   Sebagai contoh, Apakah bilangan 5236 habis dibagi 7? Kita pisahkan 6 (digit terakhir bilangan), kemudian 523 – 2 x 6 = 511. Dilanjutkan lagi, apakah 511 habis dibagi 7? Kita pisahkan 1 (digit terakhir 511), kemudian 51 – 2 x 1=49, 49 habis dibagi 7.

   Jadi, 5236 habis dibagi 7.

g. Bilangan n habis dibagi 8 jika dan hanya jika tiga digit terakhirnya merupakan bilangan yang habis dibagi 8.

h. Bilangan n habis dibagi 9 jika dan hanya jika jumlah semua digit-digitnya habis dibagi 9.

i. Bilangan n habis dibagi 10 jika dan hanya jika digit terakhirnya merupakan digit 0.

j. Bilangan n habis dibagi 11 jika dan hanya jika jumlah silang tanda berganti habis dibagi 11.

   Sebagai contoh, 979 kelipatan 11: amati bahwa (9-7+9)=11; dan 8679 juga kelipatan 11: amati bahwa (8-6+7-9)=0=0 x 11, dll.

k. Bilangan n habis dibagi 12 jika dan hanya jika jumlah semua digit-digitnya habis dibagi 3 dan dua digit terakhirnya habis dibagi 4.

l. Bilangan n habis dibagi 25 jika dan hanya jika dua digit terakhirnya merupakan bilangan yang habis dibagi 25.

m. Bilangan n habis dibagi 125 jika dan hanya jika tiga digit terakhirnya merupakan bilangan yang habis dibagi 125.

Contoh 5:

(OSK 2003) Ada berapa banyak diantara bilangan-bilangan 20000002, 20011002, 20022002, 20033002 yang habis dibagi 9 ?

Pembahasan:

Jumlah digit 20000002=2+0+0+0+0+0+0+2=4 (tidak habis dibagi 9)

Jumlah digit 20011002=2+0+0+1+1+0+0+2=6 (tidak habis dibagi 9)

Jumlah digit 20022002=2+0+0+2+2+0+0+2=8 (tidak habis dibagi 9)

Jumlah digit 20033002=2+0+0+3+3+0+0+2=10 (tidak habis dibagi 9)

Jadi, banyaknya bilangan yang habis dibagi 9 adalah 0.

Contoh 6:

(OSP 2003) Berapakah bilangan bulat positif k terkecil sehingga $\underbrace{20032003\ldots2003}_{\text{k kali}}$ habis dibagi 9?

Pembahasan:

Misalkan $N = \underbrace{20032003\ldots2003}_{\text{k kali}}$

Agar N habis dibagi 9 maka jumlah digit N harus habis dibagi 9.

Karena 2+0+0+3=5 maka jumlah digit N=5k.

Jadi, bilangan bulat positif k terkecil yang memenuhi adalah k=9.

Perlu diingat:

Perkalian n bilangan bulat berurutan selalu habis dibagi oleh n!

Coba, kerjakan menggunakan fakta di atas!

Buktikan bahwa $6|(n^3 - n)$ untuk semua bilangan bulat n.

Contoh 7:

(OSK-Tipe 3/2012) Banyaknya bilangan bulat n sehingga $\frac{10n^2-55}{2n^2+3}$ merupakan bilangan bulat adalah ....

Pembahasan:

Perhatikan bahwa $\frac{10n^2-55}{2n^2+3} = 5 - \frac{70}{2n^2+3}$

Maka $2n^2 + 3$ membagi 70.

Karena $2n^2 + 3 \geq 3$, maka nilai $2n^2 + 3$ yang mungkin memenuhi adalah 5, 7, 10, 14, 35, atau 70.

Dari keenam nilai di atas yang membuat n bulat adalah 5 atau 35.

Jika $2n^2 + 3 = 5,\ n = 1\ atau\ -1$

Jika $2n^2 + 3 = 35,\ n = 4\ atau\ -4$

Jadi, banyaknya bilangan bulat n yang memenuhi ada 4.

Contoh 8:

Tentukan semua bilangan bulat positif n sedemikian sehingga untuk semua bilangan ganjil a, jika $a^2 \leq n$ maka $a|n$.

Pembahasan:

Misalkan a bilangan ganjil terbesar sedemikian sehingga $a^2 \leq n$, sehingga jelas bahwa

$n < (a+2)^2$.

Jika $a \geq 7$, maka $a-4, a-2, a$ adalah bilangan ganjil yang membagi n.

Hal ini berakibat bahwa $(a-4)(a-2)a|n$, dan $(a-4)(a-2)a \leq (a+2)^2$

Equivalen dengan $a^3 - 6a^2 + 8a \leq a^2 + 4a + 4$.

Maka $a^3 - 7a^2 + 4a - 4 \leq 0$ atau $a^2(a-7) + 4(a-1) \leq 0$, ini suatu yang salah untuk $a \geq 7$.

Jadi nilai a yang memenuhi $a = 1{,}3,\ atau\ 5$

- Jika $a = 1$, maka $1^2 \leq n < 3^2$, sehingga $n \in \{1,2,3,\dots,8\}$.
- Jika $a = 3$, maka $3^2 \leq n < 5^2$, dan $1.3|n$, sehingga $n \in \{9,12,15,18,21,24\}$.
- Jika $a = 5$, maka $5^2 \leq n < 7^2$, dan $1.3.5|n$, sehingga $n \in \{30,45\}$.

Jadi, nilai n yang memenuhi adalah $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,12,15,18,21,24,30,45\}$

Contoh 9:

(IMO/Ke 39) Tentukan semua pasangan (a,b) dari bilangan bulat positif sedemikian sehingga $ab^2 + b + 7$ membagi $a^2b + a + b$.

Pembahasan:

Dari pernyataan $ab^2 + b + 7|(a^2b + a + b)$, kita peroleh:

$ab^2 + b + 7|b(a^2b + a + b) - a(ab^2 + b + 7) \Longrightarrow ab^2 + b + 7|b^2 - 7a$.

Kasus I: Jika $b^2 - 7a = 0$, hal ini berakibat $b^2 = 7k,\ 7k^2$. Perhatikan bahwa $(7k^2, 7k) \geq 1$ merupakan solusi untuk masalah ini.

Kasus II: Jika $b^2 - 7a > 0$, maka $ab^2 + b + 7 \leq b^2 - 7a$ dan kita peroleh suatu kontradiksi, yakni $b^2 - 7a < b^2 < ab^2 + b + 7$

Kasus III: Jika $b^2 - 7a < 0$, maka $ab^2 + b + 7 \leq b^2 - 7a$. Hal ini mungkin terjadi hanya jika $b^2 < 7$, yakni b = 1 atau b = 2.

Jika b = 1, maka a = 11 atau a = 49

Jika b = 2, $4a + 9|a + 22 \Longrightarrow 4a + 9 \leq a + 22 \Longrightarrow 3a \leq 13$. Sehingga tidak ada nilai a yang mungkin.

Jadi, solusi untuk soal ini adalah: $(7k^2, 7k),\ (11,1), dan\ (49,1)$

Contoh 10:

(Romanian IMO Team Selection Test/1998) Tentukan semua bilangan bulat positif (x, n) sedemikian sehingga $x^n + 2^n + 1$ sebagai pembagi dari $x^{n+1} + 2^{n+1} + 1$.

Pembahasan:

Kasus I: Jika $n = 1$, maka $x + 3|x^2 + 5 = (x+3)(x-3) + 14$

Sehingga $x+3$ harus membagi 14 dan x yang mungkin adalah x = 4 atau 11.

Kasus II: Jika $n \geq 2$:

- Untuk $x \in \{1,2,3\}$ kita punya:

  $1+2^n+1 < 1+2^{n+1}+1 < 2(1+2^n+1)$,

  $2^n+2^n+1 < 2^{n+1}+2^{n+1}+1 < 2(2^n+2^n+1)$,

  $2(3^n+2^n+1) < 3^{n+1}+2^{n+1}+1 < 3(3^n+2^n+1)$.

  Sehingga x^n+2^n+1 tidak membagi $x^{n+1}+2^{n+1}+1$.

- Untuk $x \geq 4$,

  $x^n = \frac{x^n}{2}+\frac{x^n}{2} \geq \frac{2^{2n}}{2}+\frac{x^2}{2}$, sehingga

  $(2^n+1)x \leq \frac{((2^n+1)^2+x^2)}{2} = \frac{(2^{2n}+2^{n+1}+1+x^2)}{2} < 2^{n+1}+x^n+2^n+2.$

  Jadi,

  $$(x-1)(x^n+2^n+1) = x^{n+1}+2^n x+x-x^n-2^n-1$$
  $$< x^{n+1}+2^{n+1}+1 < x(x^n+2^n+1);$$

  Sehingga x^n+2^n+1 tidak membagi $x^{n+1}+2^{n+1}+1$.

∴ Solusinya adalah $(4,1)$ dan $(11,1)$

LATIHAN 1

1. Bilangan a, b, c adalah digit-digit dari suatu bilangan yang memenuhi $49a+7b+c=286$. Bilangan tiga angka $(100a+10b+c)$ adalah ...
2. Sembilan buah kartu masing-masing diberi angka 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, dan 9. Secara acak diambil 4 buah kartu dari tumpukan kartu tersebut sehingga membentuk sebuah bilangan yang terdiri dari 4 angka. Berapa banyaknya bilangan tersebut yang dapat disusun dimana bilangan 4-angka tersebut lebih dari 800 dan habis dibagi 5?
3. Tentukan banyaknya anggota himpunan S, dimana $S = \left\{x \in \mathbb{Z} \middle| \frac{x^3-3x+2}{2x+1} \in \mathbb{Z}\right\}$.
4. (OSK, 2013) Diberikan himpunan $\left\{x \in \mathbb{Z} \middle| \frac{x^2-2x+7}{2x-1} \in \mathbb{Z}\right\}$. Banyaknya himpunan bagian dari S adalah ...
5. (OSK, Tipe 2/2012) Jumlah dari 2012 bilangan genap berurutan mulai dari n merupakan pangkat 2012 dari suatu bilangan asli. Nilai terkecil dari n yang mungkin adalah ....
6. (OSK, Tipe 1/2011) Misalkan kita menuliskan semua bilangan bulat 1, 2, 3, ..., 2011. Berapa kali kita menuliskan angka 1?
7. (OSK, Tipe 3/2011) Jika bilangan m dibagi 5 memberikan sisa 3, dan bilangan n dibagi 5 memberikan sisa 2; maka mn bilangan bila dibagi 5 akan memberikan sisa ....

8. (OSK, Tipe 3/2011) Untuk bilangan asli n, $p(n)$ dan $s(n)$ berturut-turut menyatakan hasil kali dan jumlah angka pembentuk n. Jika n bilangan dua angka dan $n + p(n) + s(n) = 69$, maka n adalah ....
9. (OSK 2010) Nilai n terkecil sehingga bilangan $\underbrace{20102010\ldots2010}_{n \text{ buah } 2010}$ habis dibagi 99 adalah ...
10. (OSK 2008) Jumlah empat bilangan asli berturutan senantiasa habis dibagi p. Maka nilai p terbesar adalah ....
11. (OSK 2003) Misalkan N adalah bilangan bulat terkecil yang bersifat : bersisa 2 jika dibagi 5, bersisa 3 jika dibagi oleh 7, dan bersisa 4 jika dibagi 9. Berapakah hasil penjumlahan digit-digit dari N?
12. Misalkan n adalah bilangan lima angka dan m adalah bilangan empat angka yang didapat dengan menghapus angka yang ada di tengah dari bilangan n. Banyaknya nilai n yang memenuhi bahwa $\frac{n}{m}$ adalah bilangan bulat ada sebanyak ....
13. Bilangan palidrom adalah bilangan yang akan sama nilainya baik dibaca dari kiri ke kanan maupun dari kanan ke kiri. Contoh-contoh bilangan palindrom adalah 3003, 111, 33, 0, 4, 32423, 252, 873378. Untuk bilangan dengan digit lebih dari satu, maka digit 0 tidak diperbolehkan ditaruh pada digit pertama. Banyak bilangan palidrom yang kurang dari 10000 sama dengan ...
14. Barisan bilangan memenuhi $a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n$ dengan $n \in \mathbb{N}$ dan $n \geq 1$ serta diketahui $a_1 = -1,\ a_2 = 1,\ \&\ a_3 = 2$. Jika $a_{28} = 5866990,\ a_{29} = 10791077$ dan $a_{30} = 19847885$ maka
$$\sum_{i=1}^{28} a_i$$
dibagi 1000 akan memiliki sisa ...
15. Tiga bilangan genap berurutan a, b, c sehingga
$$S = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$$
juga bilangan bulat. Tentukan bilangan bulat, S, yang mungkin.
16. (Seleksi Awal IMO Hongkong/1989) Bilangan 6 digit a1989b habis dibagi 72. Tentukan nilai a dan b

2. Bilangan Prima & Teorema Dasar Aritmatika

Definisi

Suatu Bilangan Prima adalah bilangan bulat positif lebih dari 1 yang hanya mempunyai pembagi positif 1 dan dirinya sendiri.

Definisi

Suatu bilangan bulat positif yang lebih dari 1 yang bukan *prima* disebut komposit.

Contoh 1:

Bilangan 2, 3, 5, 13, 101, dan 163 merupakan bilangan prima. Sedangkan bilangan 4=2.2, 8=4.2, 33=3.11, 111=3.37, dan 1001=7.11.13 merupakan komposit.

Lemma

Setiap bilangan bulat positif lebih dari 1 mempunyai pembagi prima.

Teorema

Ada tak hingga banyak bilangan prima.

Teorema

Jika n merupakan komposit, maka n mempunyai faktor prima tidak lebih dari $\sqrt{n}$.

Contoh 2:

Tentukan apakah 171 dan 199 merupakan bilangan prima atau komposit?

- ✓ $\sqrt{171} = 13{,}077$. Bilangan prima yang kurang dari $\sqrt{171}$ adalah 2, 3, 5, 7, 11, 13. Karena 171 habis dibagi 3, maka 171 adalah bilangan komposit.
- ✓ $\sqrt{199} = 14{,}107$. Bilangan prima yang kurang dari $\sqrt{199}$ adalah 2, 3, 5, 7, 11, 13. Karena 199 tidak habis dibagi oleh 2, 3, 5, 7, 11, dan 13, maka 199 adalah bilangan prima.

Teorema Dasar Aritmatika (Faktorisasi Prima)

Setiap bilangan bulat positif $n > 1$ dapat dinyatakan secara tunggal sebagai

$$n = p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times \ldots \times p_k^{a_k}$$

dengan k suatu bilangan asli, $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ bilangan-bilangan prima berbeda, dan $a_i \geq 1$ untuk setiap $i = 1, 2, 3, \ldots, k$.

Contoh 3:

Faktorisasi dari beberapa bilangan bulat positif diberikan sebagai berikut:

- ✓ $240 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^4 \times 3 \times 5$
- ✓ $289 = 17 \times 17 = 17^2$
- ✓ $1001 = 7 \times 11 \times 13$

Teorema Dasar Aritmatika sering digunakan dalam soal-soal olimpiade untuk menentukan faktor dari suatu bilangan bulat yang tidak diketahui. Berikut akibat dari Teorema Dasar tersebut:

- ✓ n mempunyai k faktor prima yaitu: $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$.
- ✓ Banyak faktor positif dari n adalah $(a_1 + 1)(a_2 + 1)(a_3 + 1) \ldots (a_k + 1)$.
- ✓ Banyaknya cara berbeda untuk memfaktorkan n adalah

$$\frac{1}{2}(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)\dots(a_k+1).$$

Contoh berikut merupakan aplikasi dari faktorisasi prima untuk mencari semua pembagi suatu bilangan.

Contoh 4:

Pembagi positif dari $120 = 2^3 \times 3 \times 5$ adalah bilangan bulat positif dengan faktorisasi prima berpangkat yang memuat bilangan prima 2, 3, dan 5 dengan pangkat kurang dari atau sama dengan berturut-turut 3, 1, dan 1. Sehingga, pembagi bilangan 120 adalah:

1	3	5	3. 5 = 15
2	2.3 = 6	2.5 = 10	2.3.5 = 30
2^2=4	2^2.3=12	2^2.5=20	2^2.3.5=60
2^3=8	2^3.3=24	2^3.5=40	2^3.3.5=120

Jika, soal ini dikerjakan dengan akibat teorema dasar seperti yang tertuang di atas, maka: 120 mempunyai sebanyak $(3+1)(1+1)(1+1) = 16$ pembagi/faktor positif.

Contoh 5:

Carilah bilangan bulat positif x dan y yang memenuhi kedua persamaan $\begin{cases} xy = 40 \\ 31 = 2x + 3y \end{cases}$

Pembahasan:

Perhatikn bahwa $40 = 2^3 \times 5$, terdapat (3+1) (1+1)=8 kemungkinan pasangan (x,y) yaitu, $(1,40), (2,20), (4,10), (8,5), (5,8), (10,4), (20,2), (40,1)$. Kita mudah membuktikan bahwa hanya (x,y)=(8, 5) yang jika ditambahkan akan memenuhi $31 = 2x + 3y$.

Contoh 6:

(AHSME 1998) Misalkan bilangan 1998 ditulis sebagai suatu hasil kali dari du bilangan bulat positif yang selisihnya sekecil mungkin. Berapakah selisih tersebut?

Pembahasan:

Perhatikan bahwa, $1998 = 2.3^3.37$ .Sehingga terdapat $(1+1)(3+1)(1+1)/2 = 8$ faktorisasi dari 1998, dengan menganggap bahwa urutan faktor tidak penting. Faktorisasinya adalah: $1.1998, 2.999, 3.666, 6.333, 9.222, 18.111, \& 37.54$. Selisih terkecil terjadi ketika faktornya hampir sama, yaitu 54-37=17.

Contoh 7:

(AMC 10A/2005) Berapa banyak bilangan pangkat tiga yang membagi $3!\,5!\,7!$? (Dimana $a! = 1.2.3....(a-1)\,a$)

Pembahasan:

Dengan menuliskan sebagai hasil kali prima, maka

$3!\,5!\,7! = 2^8\ 3^4\ 5^2\ 7.$

Sebuah bilangan berpangkat tiga yang merupakan suatu faktor memiliki faktorisasi prima berbentuk $2^p\ 3^q\ 5^r\ 7^s$, dengan p,q,r dan s seluruhnya adalah bilangan kelipatan 3. Terdapat 3 nilai yang mungkin untuk p, yaitu 0, 3, dan 6. Terdapat 2 nilai yang mungkin untuk q, yaitu 0 dan 3. Satu-satunya nilai untuk r dan s adalah 0. Oleh karena itu terdapat 6=3.2.1.1 bilangan pangkat tiga berbeda yang membagi $3!\,5!\,7!$. Bilangan-bilangan itu adalah

$1 = 2^0 3^0 5^0 7^0,\ 8 = 2^3 3^0 5^0 7^0, 27 = 2^0 3^3 5^0 7^0,$
$64 = 2^6 3^0 5^0 7^0, 216 = 2^3 3^3 5^0 7^0,\ \& 1728 = 2^6 3^3 5^0 7^0$

Contoh 8:

(OSP/2012) Misalkan $x, y,\ dan\ z$ adalah bilangan-bilangan prima yang memenuhi persamaan $34x - 51y = 2012\,z$. Nilai dari $x + y + z$ adalah ....

Pembahasan:

$34x - 51y = 2012\,z$ dengan x, y, dan z bilangan prima.

Karena 34 dan 2012 habis dibagi 2 serta 51 tidak habis 2, maka haruslah y habis dibagi 2.

Karena y prima, maka y =2.

Karena 34 dan 51 habis dibagi 17 serta 2012 tidak habis dibagi 17, maka z haruslah habis dibagi 17. Karena z prima, maka z = 17.

Karena y = 2, z = 17, x harus prima, maka x = 1009.

$x + y + z = 1028.$

Contoh 9:

(OSK, Tipe 1&3/2011) Ada berapa faktor positif dari $2^7.3^5.5^3.7^2$ yang merupakan kelipatan 10?

Pembahasan:

Supaya bilangan $2^7 3^5 5^3 7^2$ merupakan kelipatan 10, maka bilangan tersebut dapat ditulis dalam bentuk: $2.5\,(2^6.3^5.5^2.7^2)$, maka banyaknya faktor positif yang merupakan kelipatan 10 adalah $(6+1)(5+1)(2+1)(2+1) = 378$ faktor.

Contoh 10:

Buktikan bahwa untuk sebarang bilangan bulat $n > 1$, maka bilangan $n^5 + n^4 + 1$ bukan prima.

Pembahasan:

Perhatikan bahwa, kita memiliki:

$$n^5 + n^4 + 1 = n^5 + n^4 + n^3 - n^3 - n^2 - n + n^2 + n + 1$$
$$= n^3(n^2 + n + 1) - n(n^2 + n + 1) + (n^2 + n + 1)$$
$$= (n^2 + n + 1)\,(n^3 - n + 1)$$

merupakan perkalian dua bilangan bulat lebih dari 1.

Jadi, bilangan $n^5 + n^4 + 1$ bukan prima.

LATIHAN 2A

1. Jika n adalah bilangan prima terbesar yang kurang dari 50 dan m adalah bilangan prima terkecil yang lebih dari 50, maka nilai dari $m + n$ sama dengan ....
2. Perhatikan persamaan $2^n - 1$, tentukan dua nilai terkecil $n > 1$ sehingga persamaan tersebut tidak menghasilkan bilangan prima.
3. (OSK, 2014) Semua bilangan bulat n sehingga $n^4 - 51\,n^2 + 225$ merupakan bilangan prima adalah ...
4. (OSK, 2014) Semua pasangan bilangan prima (p, q) yang memenuhi persamaan $(7p - q)^2 = 2(p - 1)\,q^2$
5. (OSK,2013) Misalkan p dan q bilangan prima. Jika diketahui persamaan $x^{2014} - px^{2013} + q = 0$ mempunyai akar-akar bilangan bulat, maka nilai $p + q$ adalah ...
6. (OSK, Tipe 1&3/2012) Ada berapa faktor positif dari $2^7 3^5 5^3 7^2$ yang merupakan kelipatan 6?
7. (OSK, Tipe 1/2011) Tentukan semua bilangan bulat positif p sedemikian sehingga p, p + 8, p + 16 adalah bilangan prima.
8. (OSK 2009) Banyaknya pasangan bilangan asli (x,y) sehingga $x^4 + 4y^4$ merupakan bilangan prima adalah ...

Identitas Sophie German's
$a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab).$

9. (OSK 2008) Banyaknya faktor positif dari $5!$ adalah ...
10. (OSK 2007) Misalkan H adalah himpunan semua faktor positif dari 2007. Banyaknya himpunan bagian dari H yang tidak kosong adalah ….
11. (OSK 2006) Jumlah tiga bilangan prima pertama yang lebih dari 50 adalah ...
12. (OSK 2005) Faktor prima terbesar dari 2005 adalah ...
13. (OSK 2004) Bilangan 2004 memiliki faktor selain 1 dan 2004 sendiri sebanyak ...
14. (OSK 2003) Jika a dan b bilangan bulat sedemikian sehingga $a^2 - b^2 = 2003$, maka berapakah nilai $a^2 + b^2$? (diketahui bahwa 2003 merupakan bilangan prima)
15. (OSP 2011) Jika n bilangan asli dan $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{n}$ merupakan bilangan bulat, maka pembagi positif dari n sebanyak ...

16. (OSP 2011) Jika kedua akar persmaan $x^2 - 2013x + k = 0$ adalah bilangan prima, maka nilai k yang mungkin adalah ....
17. (OSP 2010) Bilangan prima p sehingga $p^2 + 7^3$ merupakan bilangan kubik sebanyak ....
18. (OSP 2009) Bilangan prima p yang memenuhi $(2p-1)^3 + (3p)^2 = 6^p$ ada sebanyak ...
19. (OSP 2009) Misalkan n bilangan asli terkecil yang mempunyai tepat 2009 faktor positif dan n merupakan kelipatan 2009. Faktor prima terkeci dari n adalah ....

LATIHAN 2B

1. (AHSME 1999) Berapakah hasil penjumlahan angka-angka desimal yang terbentuk dari hasil kali $2^{2004} \times 5^{2006}$?
2. (AMC 10B/2002) Bilangan $25^{64} \times 64^{25}$ adalah kuadrat dari suatu bilangan bulat positif N. Berapakah hasil penjumlahan angka-angka desimal dari N?
3. (AMC 12B/2002) Berapa banyakkah bilangan bulat positif sedemikian sehingga
$$n^2 - 3n + 2$$
merupakan bilangan prima?
4. (AMC 12B/2002) Bilangan bulat positif A, B, A-B, dan A+B masing-masing adalah bilangan prima. Tentukan jumlah 4 bilangan prima tersebut?
5. (AHSME 1986) Misal $N = 69^5 + 5.69^4 + 10.69 + 5.69^2 + 1$. Berapa banyak bilangan bulat positif yang merupakan faktor dari N?
6. (AMC 12A/2003) Berapa banyakkah kuadrat sempurna yang merupakan pembagi dari hasil kali $1!\,2!\,3!\,...\,9!$? (Dimana $a! = 1.2.3. ... (a-1)a$)
7. (AMC 12B/2003) Misal x dan y merupakan bilangan bulat positif sedemikian sehingga $7x^5 = 11y^{13}$. Kemungkinan nilai x minimal ini mempunyai faktorisasi prima $a^c b^d$. Berapa nilai a+b+c+d?
8. (AHSME 1990) Berapa banyakkah bilangan bulat positif kurang dari 50 yang banyaknya pembagi bilangan bulat positifnya ganjil?
9. (AHSME 1996) Misalkan n adalah sebuah bilangan bulat positif sehingga 2n memiliki 28 pembagi positif dan 3n memiliki 30 pembagi positif. Berapa banyaknya pembagi positif yang dimiliki oleh 6n?
10. (AMC 12B/2004) Jika x dan y merupakan bilangan bulat positif sedemikian sehingga $2^x 3^y = 1296$, berapa nilai x+y?
11. (AHSME 1974) Berapa bilangan prima terkecil sedemikian sehingga membagi bilangan $3^{11} + 5^{13}$?

3. FPB & KPK

a. FAKTOR PERSEKUTUAN TERBESAR (FPB)

Definisi

FPB dari dua bilangan bulat a dan b, yang keduanya tidak nol, adalah bilangan bulat terbesar yang membagi a dan juga b.

FPB dari a dan b ditulis sebagai (a,b). Kita juga mendefinisikan bahwa (0, 0)=0.

Dari definisi di atas, kita peroleh: Jika bilangan d disebut **FPB** antara a dan b, maka berlaku:

1) $d|a$ dan $d|b$
2) Untuk setiap bilangan asli c dengan $c|a$ & $c|b$ haruslah berlaku $c \leq d$.

Contoh 1:

Pembagi sekutu dari 24 dan 84 adalah $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \& \pm 12$. Jadi, $(24, 84) = 12$. Dengan cara yang sama, untuk mencari pembagi sekutu maka kita dapat: $(15,81) = 3, (100,5) = 5, (17, 25) = 1, (0,44) = 44, (-6, -15) = 3, \& (-17, 289) = 17$.

Definisi

Bilangan bulat a dan b disebut *relatif prima* jika a dan b memiliki $(a, b) = 1$.

Contoh 2:

Karena $(25, 41) = 1$, maka 25 dan 42 *relatif prima*.

Teorema

Misalkan a, b, dan c bilangan bulat dengan $(a, b) = d$. Maka

1) $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$
2) $(a + cb, b) = (a, b)$

Definisi

Jika a dan b bilangan bulat, maka *kombinasi linear* dari a dan b adalah jumlah yang berbentuk $ma + nb$, dimana m dan n keduanya bilangan bulat.

Teorema

FPB dari bilangan bulat a dan b, yang keduanya tidak nol adalah bilangan bulat terkecil, yaitu merupakan kombinasi linear dari a dan b. Dengan kata lain jika $(a, b) = d$ maka $ma + nb = d$

Definisi

Misal $a_1, a_2, \dots, a_n$ bilangan bulat yang kesemuanya tidak nol. **FPB** dari bilangan bulat tersebut adalah bilangan bulat terbesar yang membagi semua bilangan bulat tersebut. FPB dari $a_1, a_2, \dots, a_n$ ditulis sebagai $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Contoh 3:

Kita dapat melihat secara mudah bahwa, $(12, 18, 30) = 6$ & $(1015, 25) = 5$.

Lemma

Misal $a_1, a_2, \dots, a_n$ bilangan bulat yang kesemuanya tidak nol, maka

$$(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) = \big(a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, (a_{n-1}, a_n)\big).$$

Contoh 4:

Untuk menentukan FPB dari tiga bilangan 105, 140, dan 350, kita gunakan lemma di atas. Perhatikan bahwa

$$(105, 140, 350) = \big(105, (140, 350)\big) = (105, 70) = 35.$$

Algoritma Euclid

Teorema:

Misal $r_0 = a$ & $r_1 = b$ merupakan bilangan bulat sedemikian sehingga $a \geq b > 0$. Jika algoritma pembagian diterapkan secara berulang-ulang maka kita dapatkan $r_j = r_{j+1}\, q_{j+1} + r_{j+2}$ dengan $0 < r_{j+2} < r_{j+1}$ untuk $j = 0, 1, 2, \dots, n-2$ dan $r_{n+1} = 0$, maka $(a, b) = r_n$, maka $(a, b) = r_n$ *{sisa terakhir tidak nol}*

Contoh 5:

Untuk menghitung nilai $(252, 198)$, kita menggunakan algoritma pembagian secara berulang.

$$252 = 1.198 + 54$$

$$198 = 3.54 + 36$$

$$54 = 1.36 + 18$$

$$36 = 2.18$$

Jadi, menurut algoritma euclid kita peroleh $(252, 198) = 18$.

Contoh 6:

Diketahui $(15, 24) = 3$. Cari salah satu pasangan bilangan bulat (x,y) sehingga $15x + 24y = 3$.

Pembahasan:

Perhatikan bahwa

$24 = 1.15 + 9$

$15 = 1.9 + 6$

$9 = 1.6 + 3$

(*ingat mencari FPB dengan algoritma euclid*)

Dengan demikian,

$3 = 9 - 1.6 = 9 - (15 - 1.9) = 2.9 - 15 = 2(24 - 15) - 15 = 2.24 - 3.15$

Kita dapat mengambil x = -3 dan y =2.

b. KELIPATAN PERSEKUTUAN TERKECIL (KPK)

Definisi

KPK dari dua bilangan bulat a dan b adalah bilangan bulat positif terkecil yang habis dibagi oleh a dan b. **KPK** antara a dan b ditulis dengan simbol $[a, b]$.

Contoh 7:

Kita memiliki nilai KPK berikut: $[15, 21] = 105, [24, 36] = 72, [2, 20] = 20, \& [7, 11] = 77.$

Ingat kembali faktorisasi prima dari suatu bilangan bulat positif lebih dari 1. Konsep ini dapat kita terapkan untuk mencari FPB dan KPK dua bilangan bulat a dan b. Jika $a = p_1^{a_1}.p_2^{a_2}....p_n^{a_n}$ dan $a = p_1^{b_1}.p_2^{b_2}....p_n^{b_n}$ dimana $p_1, p_2, ..., p_n$ bilangan prima dengan $p_1 < p_2 < ... < p_n$ dan $a_i, b_i \in \{0 \cup \mathrm{N}\}$ untuk $i = 1, 2, ..., n$. Maka

- ✓ FPB antara a dan b: $(a, b) = p_1^{\min(a_1, b_1)}.p_2^{\min(a_2, b_2)}.... p_n^{\min(a_n, b_n)}$
- ✓ KPK antara a dan b: $[a, b] = p_1^{\max(a_1, b_1)}.p_2^{\max(a_2, b_2)}.... p_n^{\max(a_n, b_n)}$

Contoh 8:

Perhatikan faktorisasi prima dari $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$ dan $2100 = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7$. Dari faktorisasi prima tersebut, maka: $(720, 2100) = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$ sedangkan $[720, 2100] = 2^4 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 = 25\ 200.$

Teorema

Jika a dan b bilangan bulat, maka

$$[a, b] = \frac{ab}{(a, b)}$$

Contoh 9:

Tentukan semua pasangan bilangan bulat (m,n) sedemikian sehingga bilangan $A = n^2 + 2mn + 3m^2 + 2$, $B = 2n^2 + 2mn + 3m^2 + 2$, $B = 3n^2 + 2mn + 3m^2 + 1$ mempunyai pembagi persekutuan lebih dari 1.

Pembahasan:

Pembagi persekutuan untuk A, B, dan C juga merupakan pembagi untuk:

$D = 2A - B$

$E = 3A - C$

$F = 5E - 7D$

$G = 5D - E$

$H = 18A - 2F - 3E$

$I = nG - mF$

$126 = 18nI - 5H + 11F = 2.3^2.7.$

Karena 2 dan 3 tidak membagi A, B, dan C, maka $d = 7$.

Jadi, $(m,n) = \left(7a + 2,\ 7b + 3\right)\ atau\ (7c + 5,\ 7d + 4)$

Contoh 10:

(Canadian Mathematical Olympiad 1973) Buktikan bahwa jika p dan p+2 keduanya bilangan prima lebih besar dari 3, maka 6 merupakan faktor dari p + 1.

Pembahasan:

- ✓ Karena p dan p + 2 bilangan prima lebih dari 3, maka jelas bahwa keduanya tidak habis dibagi 2. Dan kita dapat menyatakan bahwa:

  $p = 2k + 1,\ \ p + 2 = 2k + 3$ untuk suatu $k \in Z$.

  Dari kondisi tersebut di atas, maka:

  $p + 1 = 2k + 2 = 2(k + 1)$, hal ini berarti $2|(p + 1)$......... (1)

- ✓ Karena p dan p + 2 bilangan prima lebih dari 3, maka jelas bahwa keduanya tidak habis dibagi 3. Dan kita dapat menyatakan bahwa:

  $p = 3n + 1\ \ atau\ \ p = 3n + 2$ untuk suatu $n \in Z$. Akan tetapi jika $p = 3n + 1$, maka $p + 2 = 3(n + 1)$, p+2 habis dibagi 3 (kontradiksi)

  Sehingga jelas bahwa $p = 3n + 2$.

  $p + 1 = 3(n + 1) \ \rightarrow\ 3|(p + 1)$ ....(2).

Dari (1) dan (2), maka $6|(p + 1)$ ini berarti 6 faktor dari p+1.

LATIHAN 3

1. Usia Pak Yudi belum ada 65 tahun. Jika usia Pak Yudi di bagi oleh 2, 3, 4, 5, dan 6 sisanya selalu 1. Berapakah usia dari Pak Yudi?
2. Usia Pak Jarwo belum ada 62 tahun. Jika usia Pak Jarwo dibagi oleh 2, 3, 4, 5, 6 berturut-turut sisanya adalah 1, 2, 3, 4, 5. Berapa usia Pak Jarwo?
3. (OSK 2015) Bilangan x adalah bilangan bulat positif terkecil yang membuat

$$31^n + x.96^n$$

merupakan kelipatan 2015 untuk setiap bilangan asli n. Nilai x adalah ....
4. Jika a, b, c adalah bilangan asli sehingga $\mathrm{FPB}(a,b) = \mathrm{FPB}\ (b,c) = \mathrm{FPB}(c,a) = 1$. Tentukan bilangan terbesar n sehingga

$$n = \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}$$

5. Tentukan bilangan bulat positif terkecil lebih dari 1 yang bersisa 1 ketika dibagi k untuk setiap $2 \le k \le 10$.
6. (OSK, Tipe 1&3/2011) Bilangan asli terkecil lebih dari 2011 yang bersisa 1 jika dibagi 2,3,4,5,6,7,8,9,10 adalah .....
7. (OSK 2009) Nilai dari

$$\sum_{k=1}^{2009} \mathrm{FPB}(k,7)$$

adalah ...
8. (OSK 2008) Diketahui FPB (a, 2008) = 251. Jika a > 2008 maka nilai terkecil yang mungkin bagi a adalah .....
9. (OSP 2010) Banyaknya anggota himpunan

$$S = \{\ \mathrm{FPB}\ (n^3+1, n^2+3n+9) |\ n \in \mathbb{Z}\}$$

adalah ...
10. (OSP 2007) Misalkan a dan b dua bilangan asli, yang satu bukan kelipatan yang lainnya. Misalkan pula KPK(a, b) adalah bilangan 2-angka, sedangkan FPB(a, b) dapat diperoleh dengan membalik urutan angka pada KPK(a, b). Tentukan b terbesar yang mungkin.

[KPK : Kelipatan Persejutuan terKecil; FPB : Faktor (pembagi) Persekutuan terBesar]
11. (OSP 2006) Misalkan $d = \mathrm{FPB}\ (7n+5, 5n+4)$ dimana n adalah bilangan asli.
    a. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli n berlaku d =1 atau 3.
    b. Buktikan bahwa d=3 jika dan hanya jika n=3k+1, untuk suatu bilangan asli k.
12. (OSP 2003) Misalkan x, y, z tiga bilangan asli berbeda. Faktor persekutuan terbesar ketiganya adalah 12, sedangkan kelipatannya persekutuan terkecil ketiganya adalah 840. Berapakah nilai terbesar bagi x + y + z ?

13. (OSP 2013) Bilangan bulat positif a dan b yang memenuhi FPB(a,b)=1 dan $\frac{a}{b}+\frac{25b}{21a}$ bilangan bulat ada sebanyak ....

4. Bilangan Kuadrat & Kubik Sempurna

Definisi

Bilangan cacah, n disebut *bilangan kuadrat sempurna* jika ada bilangan bulat m sedemikian sehingga $n = m^2$. Dan biasanya hanya disebut *kuadrat sempurna*.

Bilangan cacah, n disebut *bilangan kubik sempurna* jika ada bilangan bulat m sedemikian sehingga $n = m^3$. Dan biasanya hanya disebut *kubik sempurna*.

Sifat-sifat Dasar Bilangan Kuadrat Sempurna

1) Angka satuan yang mungkin dari bilangan kuadrat adalah 0, 1, 4, 5, 6, dan 9.
2) Jika faktorisasi prima n adalah $n = p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times \ldots \times p_k^{a_k}$, maka n disebut kuadrat sempurna ⇔ setiap a_i genap ⇔ $\tau(n)$ ganjil, dimana $\tau(n)$ menyatakan banyaknya pembagi positif dari n.
3) Setiap bilangan kuadrat sempurna dibagi 2, 3, atau 4 maka sisanya 0 atau 1.
4) Setiap bilangan kuadrat sempurna dibagi 8 maka sisanya 0, 1, atau 4.
5) Bilangan kuadrat sempurna ganjil harus mempunyai digit puluhan genap.
6) Jika digit puluhan suatu bilangan kuadrat sempurna adalah ganjil, maka angka satuan bilangan kuadrat ini adalah 6.
7) Tidak ada bilangan kuadrat sempurna di antara dua bilangan kuadrat berurutan.
8) Jika p bilangan prima dan $p|n$ maka $p^2|n^2$.

Secara umum kita definisikan bilangan pangkat sempurna (a *Perfect Power*):

Suatu bilangan cacah n dikatakan "*a perfect power/pangkat sempurna*" jika $n = m^s$ untuk suatu bilangan bulat m dan s, $s \geq 2$.

Suatu bilangan cacah n disebut bilangan pangkat ke-s sempurna jika dan hanya jika semua eksponen dalam faktorisasi primanya dapat dibagi oleh s.

Contoh 1:

(CHINA/2002) Diketahui lima digit

$$\overline{2x9y1}$$

adalah bilangan kuadrat. Tentukan nilai dari $3x + 7y$.

Pembahasan:

Misalkan $A^2 = \overline{2x9y1}$. Karena $141^2 = 19881 < A^2 \& 175^2 = 30625 > A^2$, sehingga $141^2 < A^2 < 175^2$. Angka satuan dari A yang mungkin adalah 1 atau 9. Sehingga, kita hanya mengecek bilangan $151^2, 161^2, 171^2, 159^2, 169^2$. Sekarang kita menemukan bahwa $161^2 = 25921$, dan 4 bilangan yang lain tidak memenuhi. Sehingga $x = 5, y = 2 \Rightarrow 3x + 7y = 29$.

Contoh 2:

(CHINA/1991) Tentukan semua bilangan asli n sedemikian sehingga $n^2 - 19n + 91$ merupakan kuadrat sempurna.

Pembahasan:

- Jika n > 10, maka n – 9 >0, sehingga

  $n^2 - 19n + 91 = n^2 - 20n + 100 + (n-9) = (n-10)^2 + (n-9) > (n-10)^2$, dan

  $n^2 - 19n + 91 = n^2 - 18n + 81 + (10-n) = (n-9)^2 + (10-n) < (n-9)^2$, sehingga

  $(n-10)^2 < n^2 - 19n + 91 < (n-9)^2$, ini mengakibatkan bahwa $n^2 - 19n + 91$ bukan bilangan kuadrat.
- Jika n < 9, maka

  $n^2 - 19n + 91 = (10-n)^2 + (n-9) < (10-n)^2$, dan

  $n^2 - 19n + 91 = (9-n)^2 + (10-n) > (9-n)^2$, sehingga

  $(9-n)^2 < n^2 - 19n + 91 < (10-n)^2$, ini mengakibatkan bahwa $n^2 - 19n + 91$ bukan bilangan kuadrat.
- Jika n = 9, maka

  $n^2 - 19n + 91 = 1$ (Bilangan kuadrat)
- Jika n =10, maka

  $n^2 - 19n + 91 = 1$ (Bilangan kuadrat)

Jadi, $n^2 - 19n + 91$ merupakan kuadrat sempurna jika dan hanya jika n =9 atau n =10.

Contoh 3:

Tentukan semua bilangan bulat n sehingga $n - 50$ dan $n + 50$ keduanya merupakan kuadrat sempurna

Pembahasan:

Misalkan $n - 50 = a^2$ dan $n + 50 = b^2$.

Maka $b^2 - a^2 = 100$, $(b-a)(b+a) = 2^2.5^2$.

Karena (b-a) dan (b+a) bilangan yang berbeda dan mempunyai paritas yang sama, maka kemungkinan hanya $b - a = 2 \& b + a = 50$ (yakni, b=26 dan a = 24).

Jadi, nilai n yang memenuhi hanya n = 626.

Contoh 4:

(Romanian Mathematical Olympiad 2004) Tentukan semua bilangan bulat non-negatif n sedemikian sehingga ada bilangan bulat a dan b dengan sifat $n^2 = a + b$ dan $n^3 = a^2 + b^2$.

Pembahasan:

Dari ketaksamaan $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$, kita peroleh: $2n^3 \geq n^4$, yakni $n \leq 2$.

Sehingga perhatikan bahwa:

- Untuk n = 0, kita pilih a = b = 0
- Untuk n = 1, kita pilih a = 1, b = 0
- Untuk n = 2, kita pilih a = b = 2.

Jadi, nilai n yang memenuhi adalah 0, 1, 2.

Contoh 5:

Buktikan bahwa bilangan $\underbrace{11\ldots11}_{1997}\underbrace{22\ldots22}_{1998}5$ merupakan kuadrat sempurna

Pembahasan:

$$N = \underbrace{11\ldots11}_{1997}\,10^{1999} + \underbrace{22\ldots22}_{1998}.10 + 5$$

$$= \frac{1}{9}(10^{1997} - 1).10^{1999} + \frac{2}{9}(10^{1999} - 1).10 + 5$$

$$= \frac{1}{9}(10^{3996} + 2.5.10^{1998} + 25) = \left(\frac{1}{3}[10^{1998} + 5]\right)^2 = \left(\frac{\overbrace{100\ldots00}^{1997}5}{3}\right)^2 = \underbrace{33\ldots33}_{1997}5^2.$$

Contoh 5:

Buktikan bahwa jika n kubik sempurna, maka $n^2 + 3n + 3$ bukan kubik sempurna

Pembahasan:

Andaikan $n^2 + 3n + 3$ kubik sempurna.

Maka $n(n^2 + 3n + 3)$ adalah kubik sempurna.

Perhatikan bahwa:

$$n(n^2 + 3n + 3) = n^3 + 3n^2 + 3n = (n + 1)^3 - 1.$$

Dan jelas bahwa $(n + 1)^3 - 1$ bukan kubik sempurna. Hal ini suatu kontradiksi.

Jadi, jika n kubik sempurna, maka $n^2 + 3n + 3$ bukan kubik sempurna

Contoh 6:

Misalkan m bilangan bulat positif. Tentukan bilangan bulat positif n sedemikian sehingga $m + n + 1$ kuadrat sempurna dan $mn + 1$ kubik sempurna.

Pembahasan:

Pilih $n = m^2 + 3m + 3$, kita memiliki:

$$m + n + 1 = m^2 + 4m + 4 = (m + 2)^2$$

dan

$$mn + 1 = m^3 + 3m^2 + 3m + 1 = (m + 1)^3.$$

LATIHAN 4

1. Perhatikan bahwa:

   $$m = 3^9 + 3^{12} + 3^{15} + 3^n$$

   Tentukan kemungkinan nilai bulat positif terkecil dari n sedemikian sehingga m merupakan bilangan pangkat tiga (*a perfect cube*)
2. Berapa banyak bilangan bulat positif n sedemikian sehingga pernyataan $m = 1! + 2! + 3! + \cdots + n!$ merupakan bilangan kuadrat sempurna.
3. Diketahui bahwa $2^x + 2^{13} + 2^{10}$ merupakan bilangan kuadrat sempurna. Tentukan nilai terkecil bilangan bulat dari x.
4. Diberikan bentuk

   $$X^2 + Y^3 = 793$$

   Jika $-9 \leq X, Y \leq 9$ dan X, Y bilangan bulat yang memenuhi kondisi persamaan di atas, maka nilai minimu dari $(X + Y)$ adalah ....
5. Untuk bilangan asli n, diketahui bentuk $(n + 20) + (n + 21) + (n + 22) + \cdots + (n + 100)$ merupakan kuadrat sempurna. Tentukan nilai terkecil n yang memenuhi.
6. Tentukan bilangan bulat terkecil n sedemikiansehingga $2^{200} - (2^{192} \times 31) + 2^n$ adalah bilangan kuadrat sempurna.
7. Banyaknya bilangan asli n sehingga $4^n + 2007$ merupakan kuadrat sempurna adalah ....
8. Banyaknya bilangan asli n sehingga $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$ merupakan bilangan kuadrat sempurna adalah ....
9. Jika jumlah 2009 bilangan asli berurutan adalah sebuah bilangan kuadrat sempurna. Tentukan nilai minimum dari 2009 bilangan tersebut.
10. Jumlah 2008 bilangan asli adalah bilangan kuadrat sempurna. Berapakah nilai minimum dari bilangan terbesar tersebut.
11. (OSK, Tipe 2/2012) Bilangan bulat positif terkecil a sehingga $4a + 8a + 12a + \cdots + 2012a$ merupakan kuadrat sempurna adalah ....
12. (OSK, Tipe 1 &3/2011) Bilangan bulat positif terkecil a sehingga $2a + 4a + 6a + \cdots + 200a$ merupakan kuadrat sempurna adalah ...
13. (OSP 2012) Diberikan bilangan prima $p > 2$. Jika S adalah himpunan semua bilangan asli n yang menyebabkan $n^2 + pn$ merupakan kuadrat dari suatu bilangan bulat maka S = ...
14. (OSP 2005) Bilangan tiga-angka terkecil yang merupakan bilangan kuadrat sempurna dan bilangan kubik (pangkat tiga) sempurna sekaligus adalah $\cdots$
15. (OSP 2015) Semua bilangan bulat n sehingga

$$\frac{9n+1}{n+3}$$

merupakan kuadrat suatu bilangan rasional adalah ....

16. Banyaknya bilangan asli k sedemikian sehingga jumlah dua bilangan

$$3k^2+3k-4 \ \ \& \ 7k^2-3k+1$$

merupakan kuadrat sempurna adalah ....

17. Jika

$$(x-1)(x+3)(x-4)(x-8)+m$$

merupakan kuadrat sempurna, maka nilai m adalah ...

18. (CHINA/2006) Jika $n+20 \text{ dan } n-21$ keduanya merupakan kuadrat sempurna, dimana n bilangan asli, maka nilai n sama dengan ...
19. (CHNMOL/2004) Tentukan banyaknya pasangan bilangan bulat positif (x,y) , sehingga $N = 23x+92y$ merupakan kuadrat sempurna yang kurang dari atau sama dengan 2.392.
20. (OSP, 2013) Banyaknya bilangan bulat positif n yang memenuhi n^2-600 merupakan bilangan kuadrat sempurna adalah ....

5. Kongruensi/Modulo

Konsep tentang kongruensi ini banyak digunakan dalam menyelesaikan soal-soal yang berkaitan dengan mencari sisa suatu bilangan jika dibagi dengan bilangan lain atau mencari angka satuan suatu bilangan. Dan sebagian besar soal tentang teori bilangan pada olimpiade matematika sering menggunakan konsep kongruensi ini. Sebenarnya konsep ini telah diberikan pada waktu di SD, yaitu konsep bilangan jam. Mari kita pelajari konsep ini secara mendalam dan aplikasinya juga.

Definisi

Misalkan m bilangan bulat tidak nol. Jika a dan b bilangan bulat, kita katakan bahwa a *kongruen* b modulo m jika $m|\,(a-b)$.

Jika a kongruen b modulo m, kita notasikan sebagai $a \equiv b \pmod{m}$. Jika $m \nmid (a-b$ kita katakan bahwa a dan b *tidak kongruen modulo m*, dan kita notasikan sebagai $a \not\equiv b \ (mod\, m)$

Secara umum, $a \equiv a \ (mod\, m)$ untuk sebarang $m > 0$ dan $a \equiv 0 \ (mod\, m)$ jika $m|a$.

Contoh 1:

Kita memiliki $22 \equiv 4 \pmod 9$ karena $9|(22-4) = 18$. Dan juga $3 \equiv -6 \pmod 9$; $200 \equiv 2 \pmod 9$. Tetapi, $3 \not\equiv 5 \ (mod\, 9)$ karena $9 \nmid (3-5)$.

Teorema 1

Jika a dan b bilangan bulat, maka $a \equiv b \pmod m$ jika dan hanya jika ada suatu bilangan bulat k sedemikian sehingga $a = km + b$. Dari teorema ini, kita dapat katakan bahwa jika $a \equiv b \pmod m$, maka *kita sama saja mencari sisa b ketika a dibagi oleh m*.

Bukti:

Jika $a \equiv b \pmod m$, maka $m | (a - b)$. Ini berarti ada suatu bilangan k sedemikian sehingga $a - b = \text{km} \leftrightarrow \ \text{a} = \text{km} + \text{b}$ (terbukti).

Contoh 2:

Buktikan bahwa

$$(am + b)^n \equiv b^n \pmod m$$

Bukti:

Membuktikan bahwa $(am+b)^n \equiv b^n \pmod m$ sama artinya dengan membuktikan ada suatu bilangan bulat k sehingga $(am+b)^n = km + b^n \Leftrightarrow (am+b)^n - b^n = km$.

Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}(am+b)^n - b^n &= (am)^n + n(am)^{n-1}b + \ldots + n(am)b^{n-1} + b^n - b^n \\ &= \left(a(am)^{n-1} + nba(am)^{n-2} + \ldots + na\,b^{n-1}\right)m \\ &= k\,m \ \text{(terbukti)}.\end{aligned}$$

Rumusan pada contoh 2 di atas dapat digunakan menentukan sisa pembagian bilangan yang relatif besar. Untuk aplikasinya, perhatikan contoh 3 di bawah ini.

Contoh 3:

Tentukan sisa pembagian jika 8^{2016} dibagi oleh 7.

Pembahasan:

$8^{2016} \equiv (1 \times 7 + 1)^{2016} \ (mod\ 7) \equiv 1^{2016} \ (mod\ 7) \equiv 1 \ (mod\ 7)$.

Jadi, sisa pembagiannya adalah 1.

Teorema 2

Misalkan a,b,c,d,m, dan n merupakan bilangan bulat, $m \neq 0, a \equiv b \ (mod\ m),\ c \equiv d \ (mod\ m)$. Maka

c. $a \pm c \equiv b \pm d \pmod m$

d. $ac \equiv bd \pmod m$

e. $a^n \equiv b^n \pmod m$

f. Jika $n|a,\ n|b \ \ \&(m,n) = 1$ maka $\frac{a}{n} \equiv \frac{b}{n} \pmod m$

Berikut ini beberapa teorema pendukung tentang kongruensi:

a. Jika m bilangan prima, maka $(a+b)^m \equiv (a^m + b^m)\ [\mathrm{mod}\ \ m]$

b. Jika m bilangan prima, maka $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^m \equiv ({x_1}^m + {x_2}^m + \cdots + {x_n}^m)\ [\mathrm{mod}\ \ m]$

c. Jika $m \equiv 1(\mathrm{mod}\ p^n)$, maka $m^p \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ p^{n=1})$ dimana $n > 0$ dan p bilangan prima

d. Jika $a \equiv b(\mathrm{mod}\ m),\ a \equiv b(\mathrm{mod}\ n),\ \mathrm{FPB(m,n)} = 1$ maka $a \equiv b(\mathrm{mod}\ mn)$

Contoh 4:

Tentukan sisa ketika $2^{73} + 14^3$ dibagi oleh 11.

Pembahasan:

Perhatikan bahwa:

$2 \equiv 2\ (mod\ 11)$

$\Leftrightarrow\ 2^2 \equiv\ 4\ (mod\ 11)$

$\Leftrightarrow\ 2^4 \equiv\ 4^2 \equiv 16 \equiv 5\ (mod\ 11)$

$\Leftrightarrow\ 2^8 \equiv\ 5^2 \equiv 25 \equiv 3\ (mod\ 11)$

$\Leftrightarrow\ 2^{10} \equiv\ 3\ .\ 2^2 \equiv 12 \equiv 1\ (mod\ 11)$

$\Leftrightarrow\ 2^{70} \equiv\ 1\ (mod\ 11)$

$\Leftrightarrow\ 2^{70}.2^3 \equiv\ 8\ (mod\ 11)$

$\Leftrightarrow\ 2^{73} \equiv 8\ (mod\ 11)$ ....(i)

Untuk $14^3 = (11+3)^3 \equiv 3^3 \equiv 27 \equiv 5(mod\ 11)$ ...(ii)

Dari (i) dan (ii), kita peroleh:

$2^{73} + 14^3 \equiv 8 + 5 \equiv 13 \equiv 2\ (mod\ 11)$

Jadi, sisanya adalah 2.

Contoh 5:

Tentukan sisa pembagian jika 3^{2016} dibagi oleh 26.

Pembahasan:

$3^{2016} = (3^3)^{672} = 27^{672} = (1 \times 26 + 1)^{672} \equiv 1^{672}\ (\mathrm{mod}\ 26) \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 26)$

Jadi, sisanya adalah 1.

Contoh 6:

Tentukan sisa pembagian jika 1978^{20}dibagi oleh 125.

Pembahasan:

$$1978^{20} = (16.125 - 22)^{20} \equiv (-22)^{20}\ (\mathrm{mod}125) \equiv 484^{10}\ (\mathrm{mod}125)$$

$$\equiv (4.125 - 16)^{10}\ (\mathrm{mod}125)$$

$$\equiv (-16)^{10} \pmod{125}$$

$$\equiv 256^5 \pmod{125} \equiv (2.125+6)^5 \pmod{125} \equiv 6^5 \pmod{125}$$

$$\equiv 2^5\, 3^5 \pmod{125} \equiv 32\,(-7) \pmod{125}$$

$$\equiv 26 \pmod{125}$$

Jadi, sisanya adalah 26.

Contoh 7:

Tentukan sisa jika 6^{2016} dibagi oleh 37.

Pembahasan:

Perhatikan bahwa: $6^2 \equiv -1 \pmod{37}$

$6^{2016} = (6^2)^{1008} \equiv (-1)^{1008} \pmod{37} \equiv 1 \pmod{37}$

Jadi, sisanya adalah 1.

Contoh 8:

Tentukan angka satuan dari 7^{7^7}.

Pembahasan:

Untuk mencari angka satuan dari 7^{7^7}, kita harus mencari $7^{7^7} \pmod{10}$. Perhatikan bahwa $7^2 \equiv -1 \pmod{10}$; $7^3 \equiv 7^2.7 \equiv -7 \equiv 3 \pmod{10}$; dan $7^4 \equiv \left(7^2\right)^2 \equiv 1 \pmod{10}$. Dan juga $7^2 \equiv 1 \pmod{4}$; $7^7 \equiv \left(7^2\right)^3.7 \equiv 3 \pmod{4}$, ini berarti ada suatu bilangan bulat t sedemikian sehingga $7^7 = 4t+3$. Sekarang, perhatikan bahwa:

$$7^{7^7} \equiv 7^{4t+3} \equiv \left(7^4\right)^t\, 7^3 \equiv 1^t.3 \equiv 3 \pmod{10}.$$

Jadi, angka satuannya adalah 3.

Contoh 9:

(CHINA/2004) Jika bilangan tiga digit dibagi oleh 2, 3, 4, 5 dan 7, bersisa 1. Tentukan nilai minimal dan maksimal bilangan tiga digit tersebut.

Pembahasan:

Misalkan x adalah bilangan 3 digit dengan sisa 1 jika dibagi 2, 3, 4, 5, dan 7. Maka $x-1$ habis dibagi oleh 2, 3, 4, 5, dan 7. Sehingga,

$$x-1 = k.[2,3,4,5,7] = 420k,$$ untuk suatu k bilangan asli.

Jadi, nilai minimal x adalah 420+1=421, dan nilai maksimal untuk x adalah 420.2+1=841.

Contoh 10:

Diketahui bahwa 2726, 4472, 5054, 6412 mempunyai sisa yang sama jika masing-masing bilangan tersebut dibagi oleh suatu bilangan asli dua digit m. Tentukan nilai dari m.

Pembahasan:

Karena tidak memberi pengaruh terhadap sisa yang tidak diketahui, maka tiga selisih yang disusun dari empat bilangan dapat digunakan untuk mengganti empat bilangan yang sebenarnya pada soal. Maka,

$m \mid (4472 - 2726) \Rightarrow m \mid 1746. \quad 1746 = 2.3^2.97$

$m \mid (5054 - 4472) \Rightarrow m \mid 582. \quad 582 = 2.3.97$

$m \mid (6412 - 5054) \Rightarrow m \mid 1358. \quad 1358 = 2.7.97$

Karena 97 merupakan pembagi sekutu tunggal dari selisih-selisih yang disusun dari empat bilangan pada soal, Jadi m=97.

LATIHAN 5

1. Tentukan angka satuan dari $9^{9^{2016}}$.
2. (OSP 2002) Berapa sisa pembagian $43^{43^{43}}$ oleh 100?
3. Tentukan dua digit terakhir dari $14^{14^{14}}$.
4. (OSK, Tipe 3/2012) Tentukan angka satuan dari $(2012)^{2012}$.
5. (Seleksi Awal IMO Hongkong/1991) Tentukan angka satuan dari 1997^{1991}.
6. (Seleksi Awal IMO Hongkong/1990) Tentukan sisa jika 3^{1990} dibagi oleh 41.
7. (Seleksi Awal IMO Hongkong/1989) Tentukan angka satuan dari bilangan
$$n = 1! + 2! + 3! + 4! + \cdots + 1989!$$
8. (Seleksi Awal IMO Hongkong/1989) Berapakah sisa jika
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 1990^3$$
oleh 7
9. (Seleksi Awal IMO Hongkong/1989) Misalkan $a_n = 6^n + 8^n$, tentukan sisa pembagian a_{1989} oleh 49.
10. (SSSMO/2003) Berapakah sisa pembagian jika bilangan $6^{273} + 8^{273}$ dibagi oleh 49.
11. Tentukan lima angka terakhir dari bilangan 5^{1981}.
12. (OSK 2009) Jika $10^{999999999}$ dibagi 7, maka sisanya adalah ...
13. (CHINA/2000) Tentukan sisa, jika 3^{2000} dibagi oleh 13.
14. (SSSMO/J/2001) Tentukan bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga $2^{69} + k$ habis dibagi 127.
15. Tentukan sisa, jika bilangan
$$2005^{2007^{2009}}$$
dibagi oleh 7.
16. Tentukan dua digits terakhir bilangan 2^{999}.
17. Tentukan bilangan bulat positif n terkecil sehingga

$$1000 \leq n \leq 1100 \;\&\; 1111^n + 1222^n + 1333^n + 1444^n$$

habis dibagi oleh 10.

18. (OSK, Tipe 3/2011) Jika

$$n = 2011^2 + 2^{2011}$$

maka digit satuan dari n^2 adalah ...

19. Tentukan sisa dari

$$47^{37^{27}}$$

ketika bilangan tersebut dibagi 11.

20. (SSSMO/2000) Tentukan angka satuan dari $3^{1999} \times 7^{2000} \times 17^{2001}$

6. Fungsi Euler

Definisi

Untuk setiap bilangan bulat positif n, kita definisikan

$\varphi(n)$ = banyaknya bilangan bulat positif yang tidak lebih dari n dan relatif prima terhadap n.

Dari definisi di atas, jelas bahwa $\varphi(1) = 1$ dan untuk sebarang bilangan prima p, maka $\varphi(p) = p - 1$.

Lebih lanjut, jika n bilangan bulat positif sedemikian sehingga $\varphi(n) = n - 1$, maka n bilangan prima.

Contoh 1:

$\varphi(12) = 4$ karena 1,5,7,11 relatif prima terhadap 12

$\varphi(16) = 8$ karena 1,3,5,7,9,11,13,15 relatif prima terhadap 16.

Teorema 1

Misal a, b bilangan asli saling relatif prima, p suatu bilangan prima dan m bilangan bulat positif. Maka:

- ✓ $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$
- ✓ $\varphi(p^m) = p^m - p^{m-1}$

Contoh 2:

- ✓ $\varphi(3) = 2, \varphi(4) = 2 \;\rightarrow\; \varphi(12) = \varphi(3)\varphi(4) = 4$
- ✓ $\varphi(16) = \varphi(2^4) = 2^4 - 2^3 = 8$
- ✓ $\varphi(360) = \varphi(2^3\, 3^2\, 5) = \varphi(2^3)\,\varphi(3^2)\,\varphi(5) = (2^3 - 2^2)(3^2 - 3)(5^1 - 5^0) = 96$

Teorema 2 (*Euler's Theorem*)

Misal a dan n bilangan asli relatif prima. Maka

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n$$

Contoh 3:

Karena $(3,100) = 1, \varphi(100) = \varphi(2^2)\varphi(5^2) = (2^2 - 2)(5^2 - 5) = 40.$

Jadi, $3^{40} \equiv 1 (\text{mod} 100)$

Jika p adalah prima, maka $\varphi(p) = p - 1$, kasus khusus untuk teorema 3 adalah teorema berikut:

Teorema 3 (*Fermat Little Theorem*)

Misal p bilangan prima dan $(a,p) = 1$. Maka $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$

Bentuk $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ ekuivalen dengan $a^p \equiv a \pmod p$.

Contoh 4-a:

Karena 2003 bilangan prima dan $(1234, 2003) = 1$, maka

$$1234^{2002} \equiv 1 \pmod{2003}$$

Contoh 4-b:

Jika p bilangan prima dan $(a,p) = 1$, buktikan bahwa $a^{p^{n-1}(p-1)} \equiv 1\ (mod\ p^n)$.

Pembahasan:

Dengan menggunakan teorema fermat kita mempunyai, $a^{p-1} \equiv 1\ (mod\ p)$ .... (*)

Sebelum kita melanjutkan pembahasan ini, kita akan membuktikan satu teorema yang akan dipakai pada pembahasan ini.

Jika $m = 1\ (mod\ p^n)$, maka $m^p \equiv 1\ (mod\ p^{n+1})$, dimana n > 0 dan p prima.

Bukti:

Dari $m \equiv 1\ (mod\ p^n)$, maka $m = 1 + \alpha\, p^n$, untuk suatu α bilangan bulat.

Perhatikan bahwa $np \geq n + 1$.

Jelas bahwa, $m^p \equiv (1 + \alpha p^n)^p = \cdots . = \cdots . = 1 + \beta p^{n+1}$

$\therefore\ m^p \equiv 1 (mod\ p^{n+1})$.

Dengan menggunakan teorema di atas,

$m^p \equiv 1\ (mod\ p^{n+1})$...........(**)

Dari (*) dan (**) , maka kita peroleh:

$a^{p(p-1)} \equiv 1\ (mod\ p^2)$

$a^{p^2(p-1)} \equiv 1\ (mod\ p^3)$

.

.

.

$a^{p^{n-1}(p-1)} \equiv 1 \ (mod\ p^n)$

Contoh 4-c:

Tunjukkan bahwa $n^7 - n$ habis dibagi oleh 42.

Pembahasan:

$n^7 - n = n(n^6 - 1) = n(n^{7-1} - 1)$ dan 7 prima.

Dengan menggunakan teorema fermat, kita peroleh:

$n^7 - n \equiv n(n^{7-1} - 1) \equiv n.0 \equiv 0 \ (mod\ 7)$.

Sekarang perhatikan bahwa:

$n^7 - n = n(n^6 - 1) = n(n + 1)(n - 1)(n^4 + n^2 + 1)$.

Kita tahu bahwa $n(n + 1)(n - 1)$ merupakan 3 bilangan bulat berurutan, maka bilangan ini pasti habis dibagi 3! = 6. Sehingga $n^7 - n$ habis dibagi 6.

Karena (7,6) =1, maka $n^7 - n$ habis dibagi oleh =(6.7) = 42.

Teorema 4 (*Wilson's Theorem*)

Jika p adalah bilangan prima, maka $(p - 1)! + 1 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p)$, yakni $(p - 1)! + 1$ kelipatan dari p.

Contoh 5:

Perlihatkan bahwa $12! \equiv -1 \ (\mathrm{mod}\ 13)$

Pembahasan:

Karena 13 bilangan prima, berdasarkan Teorema Wilson kita peroleh:

$12! + 1 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \ 13) \ \leftrightarrow \ \ 12! \equiv -1 \ (\mathrm{mod}\ \ 13)$ (terbukti).

Teorema Sisa China

Jika $b_1, b_2, ..., b_k$ bilangan bulat dan $m_1, m_2, ..., m_k$ pasangan bilangan relatif prima, maka

sistem $\begin{cases} x \equiv b_1 \ (\mathrm{mod}\, m_1) \\ x \equiv b_2 \ (\mathrm{mod}\, m_2) \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ x \equiv b_k \ (\mathrm{mod}\, m_k) \end{cases}$ mempunyai solusi tunggal modulo $m_1 m_2 ... m_k$.

Ingat bahwa b dikatakan ***invers*** dari a modulo n jika $ab \equiv 1 \pmod{n}$. Sekarang, $(m_j, M_j) = 1$, untuk semua j=1,2,3 ..., k, dimana $M_j = \frac{m_1 m_2 ... m_k}{m_j}$. Karenanya M_j mempunyai inverse modulo m_j, yang dinotasikan dengan $\overline{M_j}$. Maka solusi untuk sistem persamaan pada teorema di atas, yakni:

$$x = b_1 M_1 \overline{M_1} + b_2 M_2 \overline{M_2} + ... + b_k M_k \overline{M_k} .$$

Contoh 6:

Tentukan semua bilangan bulat x sedemekian sehingga $x \equiv 2 \pmod{3}$, $x \equiv 3 \pmod{5}$, $x \equiv 4 \pmod{7}$.

Pembahasan:

Karena 3, 5, 7 pasangan bilangan yang relatif prima, Berdasarkan teorem sisa china maka ada solusi tunggal modulo (3.5.7=105)

Sekarang $m_1 = 3, m_2 = 5, m_3 = 7$, $M_1 = 35, M_2 = 21, M_3 = 15$, $\overline{M_1} = 2$, $\overline{M_2} = 1$, $\overline{M_3} = 1$, jadi salah satu solusi untuk x adalah $x = 2.35.2 + 3.21.1 + 4.15.1 = 263$.

Perhatikan bahwa $263 \equiv 53 \pmod{105}$, Sehingga solusi umumnya adalah $x = 53 + 105t$ untuk sebarang bilangan bulat t.

LATIHAN 6

1. Berapa banyaknya bilangan dari 1 sampai 2015 yang saling prima dengan 2016?
2. Berapa banyak bilangan bulat antara 1 dan 1800 yang tidak habis dibagi oleh 2, 3, dan 5?
3. Tentukan sisa dari $(257^{33} + 46)^{26}$ dibagi 50.
4. Sisa jika 2^{2016} dibagi oleh 7 adalah ....
5. Tentukan digit terakhir dari 3^{2016}.
6. Sisa jika $5^{10} - 3^{10} + 2016$ dibagi oleh 11 adalah ...
7. Tentukan dua digit terakhir dari bilangan 17^{2016}.
8. Tentukan sisa pembagian jika 5^{2016} dibagi 41.
9. Tentukan sisa jika 3^{2016} dibagi oleh 47.
10. Tentukan sisa jika 2^{1990} dibagi oleh 1990.
11. Tentukan dua angka terakhir dari 3^{1999}?
12. Tentukan dua digit terakhir dari bilangan $7^{7^{1000}}$.
13. Misalkan

    $$a_1 = 4, \qquad a_n = 4^{a_{n-1}}, n > 1.$$

    Tentukan sisa jika a_{100} dibagi 7.
14. Jika p bilangan prima ganjil, maka sisa ketika $(p-1)!$ Dibagi oleh $p(p-1)$ adalah p-1.

7. Persamaan Bilangan Bulat

a. Persamaan Diophantine Linear

Definisi

Misalkan a, b, dan c adalah bilangan-bilangan bulat. Persamaan Diophantine berbentuk $ax + by = c$ disebut Persamaan Diophantine Linear dan setiap pasangan bilangan bulat (x,y) yang memenuhi $ax + by = c$ disebut solusi.

Teorema 1

> Persamaan Diophantine $ax + by = c$ mempunyai solusi jika $FPB(a,b)|c$

Teorema 2

> Jika FPB(a, b)=1, maka Persamaan Diophantine $ax + by = c$ selalu mempunyai sedikitnya satu solusi bilangan bulat

Teorema 3

> Jika x_0, y_0 solusi bilangan bulat khusus dari Persamaan Diophantine $ax + by = c$, maka solusi bilangan bulat umum persamaan ini adalah
>
> $$\begin{cases} x = x_0 + \dfrac{b}{FPB(a,b)}t \\ y = y_0 - \dfrac{a}{FPB(a,b)}t \end{cases}$$
>
> untuk sebarang bilangan bulat t.

Contoh 1:

Hitung banyak bilangan bulat $1 \le n \le 100$ yang dapat dinyatakan dalam bentuk $6x + 8y$ untuk suatu bilangan bulat x dan y.

Pembahasan:

Perhatikan bahwa FPB(6, 8)=2. Oleh karena itu menurut teorema 1 di atas, hanya bilangan yang terbagi 2 yang dapat dinyatakan dalam bentuk 6x+8y untuk suatu bilangan bulat x dan y. Dalam hal ini, $1 \le n \le 100$ yang terbagi 2 ada 50 bilangan.

Contoh 2:

Tentukan solusi umum dari persamaan diophantine $21x + 14y = 70$.

Pembahasan:

Karena $\text{FPB}\,(21,14) = 7$ dan $7|70$ maka persamaan tersebut mempunyai tak hingga banyak solusi bilangan bulat.

Perhatikan, untuk menemukan solusi umumnya kita menggunakan algoritma euclid: $1 \times 21 + (-1) \times 14 = 7$, sehingga $10 \times 21 + (-10) \times 14 = 70$. Jadi, $x_0 = 10$ & $y_0 = -10$ adalah solusi khusus, sehingga solusi umum dari persamaan diophantine, berbentuk $x = 10 + 2n$, $y = -10 - 3n$, dimana n suatu bilangan bulat.

Contoh 3:

Tentukan x dan y bulat positif yang memenuhi $7x + 5y = 100$.

Pembahasan:

FPB(7,5)=1, menurut teorema 2 di atas, maka persamaan ini mempunyai sedikitnya satu solusi. Dengan mudah bisa kita tulis

$$1 = 3 \times 7 - 4 \times 5$$

$100 = 300 \times 7 - 400 \times 5$. Maka $x_0 = 300\ \&\ y_0 = -400$.
Solusi umumnya adalah
$x = 300 + 5n, \quad y = -400 - 7n$.
Karena yang diminta x,y bulat positif, maka haruslah
$300 + 5n > 0\ \&\ -400 - 7n > 0$, yakni $-60 < n < -51\frac{1}{7}$.
Jadi, persamaan diophantine $7x + 5y = 100$ mempunyai tepat dua solusi bulat positif yaitu :

$$\begin{cases} n = -59 \ \rightarrow \ x = 5, \quad y = 13 \\ n = -58 \ \rightarrow \ x = 10, \quad y = 6 \end{cases}$$

LATIHAN 7A

1. Untuk masing-masing persamaan diophantine linear, tentukan semua solusi bulat atau tunjukkan jika tidak ada solusi bulat.
   a. $2x + 5y = 11$
   b. $17x + 13y = 100$
   c. $21x + 14y = 147$
   d. $60x + 8y = 97$
2. (CHINA/2001) Tentukan semua solusi bulat positif untuk persamaan $12x + 5y = 125$
3. Diketahui bahwa bilangan bulat positif $x > 1$ dan y memenuhi persamaan $2007x - 21y = 1923$. Tentukan nilai minimum dari 2x+3y?
4. (CHINA/2007) Diketahui persamaan $\frac{4}{3}x - a = \frac{2}{5}x + 140$ mempunyai solusi bulat positif, dimana a suatu parameter. Tentukan nilai minimum bilangan bulat positif dari a.
5. Tentukan solusi bulat dari persamaan diophantine $13x - 7y = 0$ yang memenuhi kondisi $80 < x + y < 120$.
6. Berapa banyak cara berbeda perangko seharga 81 cents dapat diganti dengan menggunakan perangko seharga 4 cents dan 7 cents saja?

7. (AHSME/1992) Jika k bilangan bulat positif sedemikian sehingga persamaan dalam variabel x; $kx - 12 = 3k$ mempunyai akar-akar bulat, maka banyaknya nilai k yang mungkin adalah ...
8. (SSSMO/J/2002) Dua bilangan bulat positif A dan B memenuhi
$$\frac{A}{11} + \frac{B}{3} = \frac{17}{33}$$
   Tentukan nilai dari $A^2 + B^2$.
9. (CHINA/1997) Diketahui m,n bilangan bulat yang memenuhi $3m + 2 = 5n + 3\ \&\ 30 < 3m + 2 < 40$, tentukan nilai dari mn.
10. (OSK 2010) Pasangan bilangan asli (x,y) yang memenuhi $2x + 5y = 2010$ sebanyak ....
11. (OSK 2006) Banyaknya solusi pasangan bilangan bulat positif persamaan $3x + 5y = 501$ adalah ...

b. Persamaan Diophantine non-Linear

Persamaan jenis ini sangat banyak bentuknya, kita tidak mungkin mengkarakteristik satu per satu. Berikut akan dibahas melalui beberapa contoh soal dan metode penyelesaiannya.

Contoh 4:

Berapa banyak pasangan terurut bilangan bulat (x,y) yang memenuhi kondisi

$$\begin{cases} 0 < x < y \\ \sqrt{1998} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \end{cases}$$

Pembahasan:

Karena $\sqrt{y} = \sqrt{1998} - \sqrt{x}$, kuadratkan kedua ruas, kita peroleh $y = 1998 + x - 6\sqrt{2.3.37x}$. Karena y bilangan bulat, maka haruslah x berbentuk:$x = (2.3.37)\ k^2$. Jelas bahwa nilai k yang memenuhi adalah k=1, sehingga kita peroleh x=222 dan y=888. Jadi, banyak pasangan terurut (x,y) adalah 1.

Contoh 5:

Berapa banyak pasangan bilangan asli (x,y) sedemikian sehingga $x^2 - y^2 = 64$?

Pembahasan:

Perhatikan bahwa $(x-y)\,(x+y) = 64$

Karena x dan y bilangan asli, dan x>y (dari persamaan di soal), serta (x-y), (x+y) keduanya juga bilangan asli, dengan $x - y < x + y$. Dengan mendaftar faktorisasi dari 64:

$64 = 1.64 = 2.32 = 4.16 = 8.8.$ Untuk menentukan nilai x dan y, perhatikan tabel berikut;

x – y	x + y	x	y	Ket
1	64	65/2	63/2	TM
2	32	17	15	M
4	16	10	6	M
8	8	8	0	TM

Jadi, Ada 2 pasangan bilangan asli yang memenuhi kondisi pada soal, yaitu (17,15) dan (10,6).

Contoh 6:

Jika x dan y bilangan asli sedemikian sehingga $x + y + xy = 9$,

berapa kemungkinan nilai terbesar untuk xy?

Pembahasan:

Perhatikan bahwa:

$$x + y + xy = 9$$

$$x + 1 + y + xy = 10$$

$$(x+1)\,(y+1) = 10$$

Perhatikan bahwa (x+1) dan (y+1) keduanya bilangan asli. Kita mendaftar faktorisasi dari 10 sebagai perkalian dua bilangan asli. Kita dapat memilih x>y. Jadi, $(x+1)\,(y+1) = 10 = 10.1 = 5.2.$ Sekarang $x + 1 = 10, y + 1 = 1$ maka $x = 9,\ y = 0 \notin \mathbb{N}$, (9,0) bukan pasangan solusi untuk soal ini. Kemudian untuk x+1=5, y+1=2 maka x=4, y=1. Nilai terbesar untuk xy=4.1=4.

LATIHAN 7B

1. (OSK, Tipe 2/2012) Pasangan bilangan asli (a,b) yang memenuhi
$$4a(a+1) = b(b+3)$$
sebanyak ...

2. (OSP 2005) Banyaknya pasangan bilangan bulat (x, y) yang memenuhi persamaan

$$2xy - 5x + y = 55$$

adalah ....

3. (OSK 2004) Jika x dan y dua bilangan asli dan

$$x + y + xy = 34,$$

maka nilai x + y = ...

4. (OSP 2015) Banyaknya pasangan bilangan bulat (a, b) yang memenuhi

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b+1} = \frac{1}{2015}$$

adalah ....

5. Berapa banyak pasangan bilangan asli (x,y) yang memenuhi persamaan $x + y = xy$?
6. Berapa banyak pasangan (x,y) yang memenuhi persamaan

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}, \qquad x, y \in N?$$

7. Tentukan banyaknya solusi bulat (x,y,z) dengan $x \neq y \neq z$, dari persamaan

$|x|\ |y|\ |z| = 12.$

8. Andaikan a, b, dan c bilangan bulat positif berbeda sedemikian sehingga

$$abc + ab + ac + bc + a + b + c = 1000.$$

Tentukan nilai dari $a + b + c$.

9. Banyaknya pasangan tripel (a,b,c) sedemikian sehingga

$a + 2b = c$ & $a^2 + b^2 = c^2$ serta $a, b, c \in N$ adalah ....

10. Berapa banyaknya pasangan terurut (a,n) dimana $a, n \in N$ yang memenuhi persamaan $n! + 10 = a^2$?

11. (SSSMO/J/2008) Misalkan n bilangan bulat positif sedemikian sehingga

$$n^2 + 19n + 48$$

merupakan bilangan kuadrat sempurna. Tentukan nilai dari n.

12. (CHINA/2003) Tentukan solusi bulat dari persamaan

$$6xy + 4x - 9y - 7 = 0.$$

13. (SSMO/J/2004) Tentukan banyaknya pasangan terurut dari bilangan positif (x,y) yang memenuhi persamaan

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2004}.$$

14. (SSMO/J/2009) Tentukan nilai terkecil dari bilangan bulat positif m sedemikian sehingga persamaan

$$x^2 + 2(m + 5)x + (100m + 9) = 0$$

hanya mempunyai solusi bulat.

15. (CHNMOL/2005) p, q adalah dua bilangan positif, dan dua akar-akar dari persamaan dalam variabel x,

$$x^2 - \frac{p^2 + 11}{9}x + \frac{15}{4}(p + q) + 16 = 0$$

adalah p dan q juga. Tentukan nilai p dan q.

16. (CHNMOL/2003) Diketahui bilangan bulat a, b yang memenuhi persamaan

$$\left[\frac{1/a}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}-\frac{1/b}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\right]\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}=\frac{2}{3},$$

tentukan nilai dari a+b.

17. (CHNMOL/1995) Banyaknya solusi bulat positif (x,y,z) yang memenuhi sistem persamaan $\begin{cases} xy+yz=63 \\ xz+yz=23 \end{cases}$.

18. (CHINA/2003) Diketahui

$$\frac{1260}{a^2+a-6}$$

adalah bilangan bulat positif, dimana a suatu bilangan bulat positif. Tentukan nilai a.

19. (SSSMO/J/2004) Misalkan x, y, z, dan w menyatakan empat bilangan bulat positif berbeda sedemikian sehingga $x^2-y^2=z^2-w^2=81$.Tentukan nilai dari $xz+yw+xw+yz$.

20. (CHINA/2003) Tentukan banyaknya solusi bulat tidak nol (x,y) yang memenuhi persamaan

$$\frac{15}{x^2y}+\frac{3}{xy}-\frac{2}{x}=2.$$

21. (CHINA/2001) Tentukan banyaknya solusi bulat positif untuk persamaan

$$\frac{x}{3}+\frac{14}{y}=3.$$

22. (CHINA/2001) Tentukan banyaknya solusi bulat positif dari persamaan

$$\frac{2}{x}-\frac{3}{y}=\frac{1}{4}$$

23. (SSSMO/2005) Berapa banyak pasangan terurut bilangan bulat (x,y) yang memenuhi persamaan

$$x^2+y^2=2(x+y)+xy?$$

24. (SSSMO/2003) Misal p bilangan prima sedemikian sehingga

$$x^2-px-580p=0$$

mempunyai dua solusi bulat. Tentukan nilai dari p.

25. (OSK, Tipe 3/2011/OSP 2008/Seleksi Awal IMO Hongkong/1999) Tentukan nilai dari $3x^2y^2$ jika x dan y adalah bilangan bulat yang memenuhi persamaan

$$y^2+3x^2y^2=30x^2+517$$

26. (OSK 2010) Diketahui bahwa ada tepat 1 bilangan asli n sehingga

$$n^2+n+2010$$

merupakan kuadrat sempurna. Bilangan asli n tersebut adalah ...

27. (OSK 2010) Diketahui p adalah bilangan prima sehingga terdapat pasangan bilangan bulat positif (x,y) yang memenuhi

$$x^2+xy=2y^2+30p.$$

Banyaknya pasangan bilangan bulat positif (x,y) yang memenuhi ada sebanyak .

28. (OSP 2010) Banyak bilangan bulat positif $n < 100$, sehingga persamaan
$$\frac{3xy-1}{x+y} = n$$
mempunyai solusi pasangan bilangan bulat (x,y) adalah ...

29. (OSP 2009) Diketahui k, m, dan n adalah tiga bilangan bulat positif yang memenuhi
$$\frac{k}{m} + \frac{m}{4n} = \frac{1}{6}$$
Bilangan m terkecil yang memenuhi adalah ...

30. (OSP 2007) Di antara semua solusi bilangan asli (x,y) persamaan
$$\frac{x+y}{2} + \sqrt{xy} = 54$$
solusi dengan x terbesar adalah (x,y)=…

31. (OSK, Tipe 3/2012) Banyaknya pasangan solusi bilangan bulat positif yang memenuhi
$$\frac{4}{m} + \frac{2}{n} = 1$$
adalah ...

8. Fungsi Tangga

Fungsi tangga yang kita bahas, dalam buku ini ada 2 jenis. Jenis-jenis tersebut yang sering digunakan dalam menyelesaikan soal-soal olimpiade atau sejenisnya. Fungsi tersebut adalah Fungsi floor (pembulatan ke bawah) dan ceiling (pembulatan ke atas).

Definisi 1
Misalkan x adalah sebarang bilangan real. Nilai fungsi floor x dinotasikan dengan $\lfloor x \rfloor$ merupakan bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x.

Definisi 2
Untuk sebarang bilangan real x, Nilai $x - \lfloor x \rfloor$, dinotasikan dengan $\{x\}$ dan disebut dengan bagian desimal dari x.

Definisi 3
Misalkan x adalah sebarang bilangan real. Nilai fungsi ceiling x dinotasikan dengan $\lceil x \rceil$ merupakan bilangan bulat terkecil yang lebih dari atau sama dengan x.

Contoh 1:
$\lfloor 2014,1 \rfloor = 2014$, $\{2014,1\} = 0{,}1$, $\lceil 2014,1 \rceil = 2015$. Sedangkan
$\lfloor -3,9 \rfloor = -4$, $\{-3,9\} = 0{,}1$; $\lceil -3,9 \rceil = -3$.

Berikut ini sifat-sifat yang berkaitan dengan fungsi tangga:

1). Jika a dan b bilangan bulat, b > 0, dan q hasil bagi jika a dibagi oleh b, maka $q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$.

2). Untuk sebarang bilangan real x dan sebarang bilangan bulat n, $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$ dan $\lceil x+n \rceil = \lceil x \rceil + n$.

3). Untuk sebarang bilangan real positif x dan sebarang bilangan bulat positif n, banyaknya kelipatan positif dari n yang tidak lebih dari x adalah $\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor$.

4). Untuk sebarang bilangan real x dan sebarang bilangan bulat positif n, $\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor$.

5). $0 \le \{x\} < 1$, dan $\{x\} = 0$ jika dan hanya jika x bilangan bulat.

6). Untuk sebarang bilangan real x, $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$.

7). Untuk sebarang bilangan real x, $x-1 < \lfloor x \rfloor \le x < \lfloor x \rfloor + 1$ atau $x-1 < \lfloor x \rfloor \le x < \lceil x \rceil$.

8). $\lfloor -x \rfloor = \begin{cases} -\lfloor x \rfloor - 1 & jika\, x\ bukan bilangan bulat \\ -\lfloor x \rfloor & jika\, x\ bilangan bulat \end{cases}$

9). Untuk sebarang bilangan real x dan y, $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \le \lfloor x+y \rfloor$.

10). Untuk sebarang bilangan real $x, y \ge 0$, $\lfloor x \rfloor . \lfloor y \rfloor \le \lfloor xy \rfloor$.

Contoh 2:

Tentukan semua bilangan bulat positif n sehingga $\lfloor \sqrt[n]{111} \rfloor$ membagi 111.

Pembahasan:

Pembagi positif dari 111 adalah 1, 3, 37, 111. Sehingga kita bagi kasus-kasus seperti berikut:

- ✓ $\lfloor \sqrt[n]{111} \rfloor = 1 \Leftrightarrow 1 \le \sqrt[n]{111} < 2 \Leftrightarrow 1 \le 111 < 2^n$, jadi $n \ge 7$.
- ✓ $\lfloor \sqrt[n]{111} \rfloor = 3 \Leftrightarrow 3 \le \sqrt[n]{111} < 4 \Leftrightarrow 3^n \le 111 < 4^n$, jadi n=4.
- ✓ $\lfloor \sqrt[n]{111} \rfloor = 37 \Leftrightarrow 37 \le \sqrt[n]{111} < 38 \Leftrightarrow 37^n \le 111 < 38^n$, jadi tidak nilai n yang memenuhi.
- ✓ $\lfloor \sqrt[n]{111} \rfloor = 111 \Leftrightarrow 111 \le \sqrt[n]{111} < 112 \Leftrightarrow 111^n \le 111 < 112^n$, jadi n=1.

Jadi, nilai $n = 1, 4\ atau\ n \ge 7$.

Contoh 3:

(OSN 2003) Tentukan semua solusi bilangan real persamaan $\lfloor x^2 \rfloor + \lceil x^2 \rceil = 2003$.

Pembahasan:

Perhatikan bahwa jika x^2 bilangan bulat, maka $\lfloor x^2 \rfloor = \lceil x^2 \rceil$ ini berakibat bahwa $x^2 = \frac{2003}{2}$ (bukan bulat), kontradiksi. Jadi, jelas bahwa x^2 bukan bilangan bulat. Ini berakibat $\lceil x^2 \rceil = \lfloor x^2 \rfloor + 1$, sehingga $2\lfloor x^2 \rfloor + 1 = 2003 \Rightarrow \lfloor x^2 \rfloor = 1001$. Dari sini dapat kita simpulkan bahwa $1001 \le x^2 < 1002$, sehingga kita peroleh solusi berbentuk: $\sqrt{1001} \le x < \sqrt{1002}$ atau $-\sqrt{1002} < x \le -\sqrt{1001}$

Contoh 4:

Selesaikan persamaan $2\lfloor x \rfloor = x + 2\{x\}$.

Pembahasan:

Jelas, bahwa untuk sebarang bilangan real x, $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$, sehingga kita peroleh:

$$2\lfloor x \rfloor = \lfloor x \rfloor + 3\{x\} \quad \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 3\{x\} < 3.$$

Jika $\lfloor x \rfloor = 0, 1, 2$, maka nilai $\{x\}$ berturut-turut adalah 0, 1/3, 2/3. Jadi, solusinya adalah $x = 0, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}$.

Contoh 5:

(SSSMO/2002) Tentukan banyaknya solusi real dari $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2x}{3} \right\rfloor = x$.

Pembahasan:

Dari soal di atas, maka x haruslah bilangan bulat. Misalkan $x = 6q + r$, dimana r = 0, 1, 2, 3, 4, atau 5 dan q bilangan bulat. Maka kita peroleh persamaan:

$$q + \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2r}{3} \right\rfloor = r.$$

- ✓ $r = 0 \Rightarrow q = 0$, x = 0 (Memenuhi)
- ✓ $r = 1 \Rightarrow q = 1, x = 7$ (Memenuhi)
- ✓ $r = 2 \Rightarrow q = 0, x = 2$ (Memenuhi)
- ✓ $r = 3 \Rightarrow q = 0, x = 3$ (Memenuhi)
- ✓ $r = 4 \Rightarrow q = 0, x = 4$ (Memenuhi)
- ✓ $r = 5 \Rightarrow q = 0, x = 5$ (Memenuhi)

Jadi, ada 6 solusi yang memenuhi persamaan.

Banyaknya angka nol di bagian kanan tanpa terputus pada n!

Untuk mencari banyaknya angka nol pada bagian kanan n!, kita dapat menggunakan rumus berikut:

$$q = \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{5^3} \right\rfloor + \ldots$$

Kita dapat membuat rumus umum bahwa, Pangkat tertinggi dari p dalam n! $(p \le n,\ p\ \ prima)$ adalah $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \ldots$

Contoh 6:

Tentukan banyak angka nol di sebelah kanan tanpa putus dari bilangan 31!

Pembahasan:

Kita terapkan rumus di atas, Banyak angka nol di bagian kanan tanpa putus dari 31! adalah $\left\lfloor \frac{31}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{31}{5^2} \right\rfloor = 6 + 1 = 7.$

LATIHAN 8

1. Tentukan nilai dari $\lfloor\sqrt{1}\rfloor + \lfloor\sqrt{2}\rfloor + \lfloor\sqrt{3}\rfloor + \lfloor\sqrt{4}\rfloor + \cdots + \lfloor\sqrt{2015}\rfloor$.
2. Tentukan nilai dari $\lfloor X \rfloor$ dimana
$$X = \frac{1}{\sqrt{0} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2012} + \sqrt{2014}}$$
3. Misalkan n adalah bilangan lima digit. Jika q dan r berturut-turut merupakan hasil bagi dan sisa bagi ketika dibagi 100, maka banyaknya bilangan bulat n sehingga $q + r$ habis dibagi 11 sama dengan ....
4. (OSK, 2013) Misalkan $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x dan $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x. Tentukan semua x yang memenuhi $\lfloor x \rfloor + \lceil x \rceil = 5$.

5. (OSK, Tipe 2/2012) Banyaknya angka 0 sebagai angka-angka terakhir dari 2012! Adalah ...
6. (OSK, Tipe 3/2012) Tentukan bilangan n terbesar sehingga 6^n membagi 30!
7. (OSK, Tipe 1/2012) Jika $\left(\sqrt{2012}+\sqrt{2011}\right)^2 = n + r$ dengan n merupakan bilangan asli dan $0 \le r < 1$, maka nilai r = ...
8. (OSK 2003) Untuk setiap bilangan real α, kita definisikan $\lfloor\alpha\rfloor$ sebagai bilangan bulat yang kurang dari atau sama dengan α. Sebagai contoh, $\lfloor 4{,}9\rfloor = 4$ & $\lfloor 7\rfloor = 7$. Jika x dan y bilangan real sehingga $\lfloor\sqrt{x}\rfloor = 9$ & $\lfloor\sqrt{y}\rfloor = 12$, maka nilai terkecil yang mungkin dicapai oleh $\lfloor y - x\rfloor$ adalah ?
9. (OSK 2007) Jika $\lfloor x\rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari atau sama dengan bilangan real x, $\left\lfloor\sqrt{3}-\sqrt{5}\right\rfloor^2 = \ldots$
10. (OSK 2007) Jika n adalah bilangan asli sehingga 3^n adalah faktor dari 33!, maka nilai n terbesar yang mungkin adalah ...
11. (OSP 2014) Untuk sebarang bilangan real x, didefinisikan $\lfloor x\rfloor$ sebagai bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x. Jumlah 2014 digit terakhir dari
$$\left\lfloor\frac{60^{2014}}{7}\right\rfloor$$
adalah ....

DAFTAR PUSTAKA

Adbul, Sakir. 2009. *Matematika 1*. Malang: UIN Malang Press

An, Kevin. 2011. *Mass Points*. OMC

Andreescu, Titu & Dorin, Andrica. Tanpa Tahun. *Number Theory (Structures, Examples, & Problems)*. Berlin: Birkhauser.

Andreescu, Titu, dkk. 2006. *104 Number Theory Problem from The Training of the USA IMO Team*. Berlin: Birkhauser.

Andreescu, Titu, dkk. 2010.*An Introduction to Diophantine Equations*. Berlin: Birkhauser.

Andreescu, Titu & Bogdan A. 2006. *Mathematical Olympiads Treasure*. Berlin: Birkhauser.

Andreescu, Titu & Dorin Andrica. 2003. *360 Problem for Mathematical Contest*. Romania: GIL Publishing House.

Andreescu, Titu & Razvan Gelca. 2009. *Mathematical Olympiads Challenges*. Berlin: Birkhauser.

Binatari, Nikenasih. 2009. *Master Juara Olimpiade Matematika SMA Nasional & Internasional*. Yogyakarta: Pustaka Widyatama.

Budhi, Wono Setya. 2003. *Langkah Awal Menuju ke Olimpiade Matematika*. Jakarta: CV. Ricardo.

Chowdhury, KC. 2007. *A First Course in Number Theory*. New Delhi: Asian Books Private Limited.

Erickson, M. 2009. *Aha Solutions*. New York: MAA.

Faires, J. Douglas. 2007. *Langkah Pertama Menuju Olimpiade Matematika (Menggunakan Kompetisi Matematika Amerika) [Terjemahan Indonesia]*. Bandung: Pakar Raya.

Hermanto, Edy. 2010. *Diktat: Pembinaan Olimpiade Matematika Ver. 03*. Bengkulu: SMAN 5 Bengkulu.

Hermanto, Edy. 2010. *Kumpulan Soal & Solusi Olimpiade Matematika Indonesia (9 Tahun Penyelenggaraan OSN)*. Bengkulu: SMAN 5 Bengkulu.

Hermanto, Edy. Bank Soal Solusi OSK-OSP-OSN Tahun 2002 s.d. Tahun 2015.

Polya, G & Jeremy, K. 1974. *The Stanford Mathematics Problem Book with Hints & Solutions.* New York: Teachers College Press.

Protter, Murray H. 1998. *Basic Elements of Real Analysis With a 48 Illustrations*. New York: Springer.

Kessler, G & Lawrence Z. 2006. *NYsML-ARML Contest 1983-1988*. USA:MAA.

Manfrino, Radmila B & J A G Ortega. 2009. *Inequality: A Mathematical Olympiad Approach*. Berlin: Birkhauser.

Faires, J., Douglas & David Wells. 2008. *The Contest Problem Book VIII- AMC 10-(2000-2007).* Amerika: MAA

Faires, J., Douglas & David Wells. 2008. *The Contest Problem Book IX- AMC 12-(2001-2007).* Amerika: MAA

Salkind, CT. 1980. *The Contest Problem Book I: AHSME 1950-1960*. New York: MAA.

Salkind, CT. 1965. *The Contest Problem Book II: AHSME 1961-1965*. New York: MAA.

Salkind, CT & James, ME. 1973. *The Contest Problem Book III: AHSME 1966-1972*. New York: MAA.

Shell, Niel, dkk. 1982. *The contest Problem Book IV: AHSME 1973-1982*. New York: MAA.

Silverman, Richard A. 1989. *Essential Calculus with Applications*. New York: Dover Publications INC.

Tim Pembina Olimpiade Matematika. 2009. *Materi Pengantar OSN Bidang Matematika SMA*. Jakarta: Depdiknas.

Jiagu, Xu. 2010. *Mathematical Olympiad Series-Vol 6: Lecture Notes on Mathematical Olympiad Course For Junior Section (Vol. 1)*. Singapore: World Scientific Publishing.

Jiagu, Xu. 2010. *Mathematical Olympiad Series-Vol 6: Lecture Notes on Mathematical Olympiad Course For Junior Section (Vol. 2)*. Singapore: World Scientific Publishing.

Noormandiri, BK. 2007. *Matematika untuk SMA Kelas X*. Jakarta: Erlangga.

Noormandiri, BK. 2007. *Matematika untuk SMA Kelas XI IPA*. Jakarta: Erlangga.

Nuharini, D dan Tri Wahyuni. 2008. *Matematika: Konsep dan Aplikasinya untuk SMP/MTs Kelas VII*. Jakarta: DEPDIKNAS.

Purcell, Edwin J, dkk. 1984. *Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 1 (edisi ke-4)*. Jakarta: Erlangga.

Reiler, HB. 2006. *The Contest Problem Book 7, AMC 1995 – 2000*. New York: MAA.

Ruderman, HD. 2007. *NYSML-ARML Contest 1973-1985*. Oklahoma: Mu alpha Theta.

Santos, David A. 2005. *Number Theory for Mathematical Contests*. Johns Hopkins University.

Saul, ME, dkk. 1986. *The New York City Contest Problem Book: 1975-1984*. USA: Dale Seymour Publication.

Sembiring, S. 2002. *Olimpiade Matematika untuk SMU*. Bandung: Yrama Widya.

Wagiyo, A, dkk. 2008. *Pegangan Belajar Matematika 1 untuk SMP/MTs Kelas VII.* Jakarta: PT Galaksi Puspa Mega (DEPDIKNAS).

Wintarti, Atik, dkk. 2008. *Contectual Teaching and Learning: Matematika SMP/MTs Kelas VII Edisi 4*. Jakarta: DEPDIKNAS.

Wirodikromo, S. 1995. *Matematika untuk SMU Kelas 1 Catur Wulan 1*. Jakarta: Erlangga.

Zawaira, Alexander & Gavin H. 2009. *A Primer for Mathematics Competitions*. New York: Oxford University Press Inc.

------------. Tanpa Tahun. *Mathematics, Textbook for Class XI*.

Bank Soal dari Tim LOPI Jakarta.

Bank Soal dari Pelatihan.com (Bandung).